Trasformata Zeta di segnali discreti.

Distribuzionale	*Sequenza*	*Trasformata* $\mathcal{Z}$
$U = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U^n \delta(t-n)$	$\left(U^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$	$\mathcal{U}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} U^n z^{-n}$
U reale	$U^n \in \mathbb{R}$	$\mathcal{U}(\bar{z}) = \overline{\mathcal{U}(z)}$
$W = U * V = \sum_n \Big(\sum_k U^k V^{n-k}\Big)\delta(t-n)$	$W^n = \sum_k U^k V^{n-k}$	$\mathcal{W}(z) = \mathcal{U}(z)\mathcal{V}(z)$
$W = \delta(t-k) * U = \sum_n U^n \delta(t-n-k)$	$W^n = U^{n-k}$	$\mathcal{W}(z) = z^{-k}\mathcal{U}(z)$
$W = U + V$	$W^n = U^n + V^n$	$\mathcal{W}(z) = \mathcal{U}(z) + \mathcal{V}(z)$
$W = \sum_n a^n U^n \delta(t-n)$	$W^n = a^n U^n$	$\mathcal{W}(z) = \mathcal{U}(z/a)$
$W = \sum_n n U^n \delta(t-n) = t\, U(t)$	$W^n = nU^n$	$\mathcal{W} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{U}(z)$
$W = \sum_n U^n \delta(t-nk)$	$W^n = \begin{cases} U^m & \text{se } n = km \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\mathcal{W}(z) = \mathcal{U}(z^k)$
$W = \sum_n n(n-1)\cdots(n-k)U^{n-k}\delta(t-n)$		$\mathcal{W} = (-1)^{k+1}\, z\, \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}}\mathcal{U}(z)$
$U = \delta(t)$	$U^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\mathcal{U}(z) = 1$
$U = \delta(t-k)$	$U^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\mathcal{U}(z) = z^{-k}$
$U = \sum_{n\geq 0} \delta(t-n)$	$U^n = H(n)$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z}{z-1}$
$U = \sum_{n\geq 0} a^n \delta(t-n)$	$U^n = H(n)a^n$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z}{z-a}$
$U = \sum_{n\geq 0} n\delta(t-n) = t\,⧢(t)$	$U^n = H(n)n$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$U = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} a^{n-k}\delta(t-n)$	$U^n = H(n)\binom{n}{k} a^{n-k}$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z}{(z-a)^{k+1}}$
$U = \sum_{n\geq 0} \cos(\omega n)\delta(t-n) = \cos(\omega t)\,⧢(t)$	$U^n = H(n)\cos(\omega n)$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2\cos\omega\, z + 1}$
$U = \sum_{n\geq 0} \sin(\omega n)\delta(t-n) = \sin(\omega t)\,⧢(t)$	$U^n = H(n)\sin(\omega n)$	$\mathcal{U}(z) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2\cos\omega\, z + 1}$

Si intende che tutti i segnali hanno supporto limitato a sinistra, cioè esiste un intero n_0 tale che $U^n \equiv 0$ per $n < n_0$ e che per qualche costante $C, R > 0$

$$|U^n| \leq CR^n.$$

Nel caso discreto la funzione di Heaviside in 0 viene definita dal limte destro $H(0) = 1$.

I coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

In particolare

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{se } n < k.$$

Quindi $H(n)\binom{n}{k} = H(n-k)\binom{n}{k}$.

La formula di inversione per la trasformata zeta $\mathcal{U}$ di un segnale U definita al di fuori di un disco di raggio R centrato nell'origine è

$$U^n := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{U}(z) z^n \frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Res}(\mathcal{U}(z) z^{n-1}; z = z_k)$$

dove Γ è una circonferenza centrata nell'origine e di raggio maggiore di R. Nell'ultima formula si suppone che $\mathcal{U}$ sia olomorfa in tutto il piano complesso, salvo le singolarità isolate $z_0 = 0, z_1, z_2, \cdots, z_m$.