MODELLI E METODI MATEMATICI II, PROVA SCRITTA DEL 21/2/2008

COGNOME NOME

Esercizio 1 Disegnare ***sul retro del foglio*** i segnali

$$u(t) := \triangle(t) - 2\triangle(t-1),$$
$$v(t) := u * \sqcup\!\sqcup_3, \qquad w(t) := u * \sqcup\!\sqcup_1, \qquad z(t) := u * \sqcup\!\sqcup_2$$

ricordando che il grafico di $\triangle(t) := (1-|t|)^+$ è un triangolo isoscele di altezza 1 e base $(-1,1)$. Calcolare

$$\frac{d}{dt}u =$$
$$y := \frac{d^2}{dt^2}u =$$
$$\frac{d}{dt}v =$$
$$\frac{d^2}{dt^2}v = .$$

Esercizio 2 Calcolare le trasformate di Fourier dei segnali v e $y = \frac{d^2}{dt^2}u$

$$\hat{v}(f) =$$
$$\hat{y}(f) =$$

Esercizio 3 Calcolare le distribuzioni

$$\mathrm{rect}(t/2-1) * H(t+4) * \delta'''(t-1) =$$
$$\delta'(t-2) \cdot \Big(H * H(t+1)\Big) =$$

Esercizio 4 Determinare le soluzioni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$(t^2+t)u(t) = \cos(t)\delta(t-\pi),$$

Esercizio 5 Sia $\omega \in \mathbb{R}$ un parametro reale e sia $\mathscr{T}_\omega$ il filtro *causale e discreto* che ad ogni segnale discreto $U = \sum_n U^n \delta(t-n)$ associa la soluzione causale $V := \mathscr{T}_\omega[U]$ dell'equazione alle differenze

$$V^{n+2} - V^{n+1} + (\tfrac{1}{4} - \omega)V^n = U^{n+2}$$

Stabilire per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ il filtro è (fortemente) stabile.

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_\omega$ per $\omega := 1/4$.

Per $\omega := 1/4$ determinare la soluzione dell'equazione alle differenze corrispondente ai segnali $U := \delta(t-2) - \delta(t)$

e $U := \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata Z del segnale $W := \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-2n+1)$

Esercizio 7 *Rispondere sul retro del foglio al maggior numero possibile di domande (valide per la prova orale), giustifcando la risposta*
1- Se $\hat{u} \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ allora $u \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$.
2- Se $\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ allora $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
3- Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $fu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.
4- Il prodotto $(t^2+\pi^2)u$ è 0 se e solo se $u = c_1\delta(t-i\pi) + c_2\delta(t+i\pi)$.
5- Se $\hat{u} = \sum_k c_k\delta(t-t_k)$ allora u è periodico.
6- Se $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora si può ricostruire u dalla sua trasformata di Fourier campionata ad un passo opportuno.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI

1	2	3	4	5	6	7	Totale