MODELLI E METODI MATEMATICI II, PROVA SCRITTA DEL 21/6/2007

COGNOME NOME

ORALE (barrare un solo riquadro) 22/6 2-3/7 11-13/7

Esercizio 1 *(Rispondere se possibile a tutte le domande)*
Disegnare ***sul retro del foglio*** i segnali

$$u(t) := 2H(t^2-1)\triangle(t/2), \qquad v(t) := \big(\cos \pi t - 1/2\big)^+, \qquad w(t) := u * \sqcup\!\sqcup_2$$

ricordando che t^+ indica la parte positiva di t e $\triangle(t) := (1-|t|)^+$. Calcolare

$$z := \frac{d}{dt}u =$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u =$$

$$\frac{d}{dt}v =$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v = .$$

Esercizio 2 *(Almeno due risposte)*
Calcolare le trasformate di Fourier dei segnali $z = \frac{d}{dt}u, v, w$

$$\hat{z}(f) =$$

$$\hat{v}(f) =$$

$$\hat{w}(f) =$$

Esercizio 3 *(Almeno due risposte)* Calcolare le distribuzioni

$$\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\delta(t-k)\Big) * \sum_{k=0}^{+\infty}\delta(t-k) =$$

$$\mathrm{rect}(t-1) * H(t-3) * \delta''(t+1) =$$

$$\Big(e^{t^2}\cdot\delta'(t-1)\Big) * H(2-t) =$$

Esercizio 4 *(Rispondere)* Determinare le soluzioni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$(t^2-1)(t+1)^2u(t) = t\delta(t-2),$$

Esercizio 5 *(Rispondere almeno alle prime tre domande)*
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\mathscr{T}_\alpha$ il filtro *causale e discreto* che ad ogni distribuzione dscreta $U = \sum_n U^n\delta(t-n)$ associa la soluzione causale $V := \mathscr{T}_\alpha[U]$ dell'equazione alle differenze

$$2V^{n+2} - V^{n+1} + (\alpha - 2\alpha^2)V^n = U^{n+2}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{Z}$ il filtro è (fortemente) stabile.

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_\alpha$.

Per $\alpha := 1/2$ determinare la soluzione dell'equazione alle differenze corrispondente ai segnali $U := \delta(t-1) - \delta(t-4)$

e $U := \sum_{n=1}^{\infty}\delta(t-n)$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata Z del segnale $W := \sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t-3n)$

Esercizio 7 Supponiamo che $\frac{d}{dt}u = \sum_{j=1}^{N} a_j\delta(t-t_j)$, per qualche scelta di (un numero finito di) coefficienti $a_j, t_j \in \mathbb{R}$. Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ mostrare che $\sum_{j=1}^{N} a_j = 0$.

Esercizio 8 *Rispondere sul retro del foglio al maggior numero possibile di domande (valide per la prova orale), giustifcando la risposta*
1- Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ allora esiste la sua trasformata di Fourier.
2- Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ allora $\hat{u} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.
3- Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ allora $\hat{u} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
4- Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ allora $\frac{d}{dt}u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
5- Se $\hat{u}$ è un segnale discreto allora anche u è discreto.
6- Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $(t^2-i)u(t) = 0$ allora $u \equiv 0$.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI

1	2	3	4	5	6	7	Totale