MODELLI E METODI MATEMATICI II, PROVA *in itinere* DEL 30/4/2007

COGNOME NOME

Svolgere almeno i riquadri marcati con ∗ e l'esercizio 6.

Esercizio 1 Disegnare (***sul retro del foglio***) i segnali

$$u(t) := H(1-t)t + H(t-2)\cos(2\pi t), \quad v(t) := \big((t-1)\operatorname{rect}(t-1)\big) * ⨿_2,$$
$$w(t) := \Big(\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t-1)\Big) * ⨿_1$$

Calcolare nel senso delle distribuzioni

$$\frac{d}{dt}u = \boxed{} \ *$$
$$\frac{d^2}{dt^2}u = \boxed{}$$
$$\frac{d}{dt}v = \boxed{} \ *$$
$$\frac{d^2}{dt^2}v = \boxed{}.$$

Esercizio 2 Calcolare le trasformate di Fourier dei segnali u, v, w

$$\hat{u}(f) = \boxed{}$$
$$\hat{v}(f) = \boxed{} \ *$$
$$\hat{w}(f) = \boxed{} \ *$$

Esercizio 3 Calcolare le distribuzioni

$$\delta'(t+2) * \delta'(t-1) * \operatorname{rect}(t/2) = \boxed{} \ *$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin(2k)e^{ikt} = \boxed{}$$
$$\Big(\frac{1}{t^2+1} \cdot \delta'(t+1)\Big) * H(-t)\cos t = \boxed{}$$

Esercizio 4 Determinare le soluzioni $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$(t^2+5t+6)u(t) = t\delta(t-2), \qquad \boxed{} \ *$$

e di

$$-\frac{1}{4\pi^2}v'' + \frac{5i}{2\pi}v' + 6v = 2e^{-4\pi i t} \qquad \boxed{}$$

Esercizio 5 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\mathscr{T}_\alpha$ il filtro *causale* che ad ogni distribuzione causale u associa la soluzione causale $v := \mathscr{T}_\alpha[u]$ dell'equazione di convoluzione

$$H(t)\cos(\alpha t) * \big(\delta'' + \alpha^2\delta\big) * \big(v' + v\big) = u$$

Rappresentare $\mathscr{T}_\alpha$ come *un'equazione differenziale* in u e v

$\boxed{}$ *

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_\alpha$.

$\boxed{}$ *

Supponiamo che $v(t) = H(t)g(t)$ con $g \in C^2(\mathbb{R})$ risolva l'equazione con $u = \delta' + H(t)e^{-t^2}$. Determinare $g(0)$ e $g'(0)$.

$\boxed{}$

Esercizio 6 A. Scrivere le definizioni di $\operatorname{pv}\frac{1}{t+1}$, e di $u = \frac{d}{dt}\operatorname{pv}\frac{1}{t+1}$.

B. Sia $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}\phi \subset [0, +\infty)$. Discutere la verità delle seguenti proprietà:

1. $\lim_{f\to+\infty} f^4\hat{\phi}(f) = 0$
2. $\sum_{k=0}^{+\infty}\hat{\phi}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\phi(k)$
3. $\delta'(t)\cdot\phi = 0$
4. $\langle\delta(t-1), \phi\rangle = \phi(1)$
5. $e^{2\pi i f} * \hat{\phi}(f) = 0$
6. $\mathscr{L}[\phi](2\pi i f) = \hat{\phi}(f)$
7. $\mathscr{L}[\phi](-1) = 0$

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI

1	2	3	4	5	6	7	Totale