Modelli e Metodi Matematici II, prova del 4/9/2006

Cognome ____________ Nome ____________

Esercizio 1 Disegnare (***sul retro del foglio***) i segnali

$$z(t) := \mathrm{sign}(t)\mathrm{rect}(t/6), \quad u(t) := z * ⧢_5 \quad , \quad v(t) := \begin{cases} -1+|t| & \text{se } |t| \geq 2 \\ 1-|t| & \text{se } |t| < 2. \end{cases}$$

Calcolare nel senso delle distribuzioni

$$\frac{d}{dt}u =$$

$$\frac{d}{dt}v = \qquad .$$

Esercizio 2 Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali u e v dell'esercizio precedente

$$\hat{u}(f) =$$

$$\hat{v}(f) =$$

Esercizio 3 Calcolare le distribuzioni

$$\delta'''(t+1)\cdot\Big(H(t)*H(t-2)\Big) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{ikt} =$$

$$\Big(|t|*\delta''(t)\Big)\cdot(t-1)^2 =$$

Esercizio 4 Determinare le soluzioni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$\sin(\pi t)u(t) = \delta(t+1/2),$$

e la trasformata di Fourier di u

$$\hat{u}(f) =$$

Esercizio 5 Siano z, u i segnali definiti nell'esercizio 1. Calcolare i limiti nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n\to\infty} n\, z^2(nt) = \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} n^3\, u(nt) =$$

Esercizio 6 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$ il filtro *causale* che ad ogni distribuzione causale u associa la soluzione causale $v := \mathscr{T}_{\alpha,\beta}[u]$ dell'equazione di convoluzione

$$H(t)e^{\alpha t} * \big(\delta'' + (1-\beta)\delta' - \beta\delta\big) * v' = u' + u$$

Determinare i valori di α e β per cui il filtro *è stabile*:

Rappresentare $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$ come *un'equazione differenziale* in u e v

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$.

Esercizio 7 Sia $\mathscr{R}$ il filtro discreto *causale* descritto dall'equazione alle differenze (ingresso U, uscita V)

$$V_n - 3V_{n-1} + 2V_{n-2} = U_{n-1}$$

Determinare la risposta impulsiva A di $\mathscr{R}$

$$A_n =$$

e stabilire se $\mathscr{R}$ è stabile. Posto poi $V_n = H(n)2^n$ e $U = \mathscr{R}[V]$, calcolare

$$U_n - 2U_{n-1} =$$

Esercizio 8 *(Facoltativo)* Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale assolutamente integrabile. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su $\hat{u}$ in modo che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t-n) = \sin(2\pi t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	7	Totale