Modelli e Metodi Matematici II, prova del 5/7/2006

Cognome Nome

Esercizio 1 Disegnare (***sul retro del foglio***) i segnali

$$z(t) := \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{rect}(t), \quad u(t) := z * \sqcup\!\sqcup_2 \quad , \quad v(t) := \begin{cases} -\mathrm{sign}(t) & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1 - |t| & \text{se } |t| < 1. \end{cases}$$

Calcolare nel senso delle distribuzioni

$$\frac{d}{dt}u =$$

$$\frac{d}{dt}v =$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v =$$

Esercizio 2 Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali u e v dell'esercizio precedente

$$\hat{u}(f) =$$

$$\hat{v}(f) =$$

Esercizio 3 Calcolare le distribuzioni

$$\delta'(t-1) \cdot \Big(H * H\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(2kt) =$$

$$H(t)t^2 * \delta'(t-1) * \delta''(t-2)$$

$$=$$

Esercizio 4 Determinare le soluzioni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$(t^2 + t)u(t) = \delta'(t-1),$$

e la trasformata di Fourier di u

$$\hat{u}(f) =$$

Esercizio 5 Sia u il segnale definito nell'esercizio 1. Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n\to\infty} u(nt) =$$

Esercizio 6 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$ il filtro *causale* che ad ogni distribuzione causale u associa la soluzione causale $v := \mathscr{T}_{\alpha,\beta}[u]$ dell'equazione di convoluzione

$$(H - \alpha\delta) * \big(\delta' + \beta\delta + (\alpha+2)H\big) * v = u$$

Determinare i valori di α e β per cui il filtro *è stabile*:

Rappresentare $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$ come *un'equazione differenziale* in u e v

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_{\alpha,\beta}$ corrispondente alla scelta $\alpha = 2, \beta = -4$.

Esercizio 7 Sia $\mathscr{R}$ il filtro discreto *causale* descritto dall'equazione alle differenze (ingresso U, uscita V)

$$2\big(V_{n+1} - V_n\big) - \big(V_n - V_{n-1}\big) = U_{n+1} - U_n$$

Determinare la risposta impulsiva A di $\mathscr{R}$

$$A_n =$$

e stabilire se $\mathscr{R}$ è stabile. Posto poi $W = \mathscr{R}[H]$ (uscita corrispondente all'ingresso $U_n = H(n)$), calcolare

$$\lim_{n\to\infty} W_n =$$

Esercizio 8 *(Facoltativo)* Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale assolutamente integrabile. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su $\hat{u}$ in modo che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t-n) = \sin(2\pi t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	7	Totale