

Prova scritta di *Modelli e Metodi matematici II*, 15 giugno 2004

COGNOME	NOME

Tempo a disposizione: **2 ore**

**Esercizio 1** per  $n \in \mathbb{N}$  sia  $u_n$  la funzione continua, lineare a tratti, con supporto nell'intervallo  $[0, 6/n]$ , che vale 0 per  $t = 0$ ,  $n$  per  $t = 1/n$ ,  $-2n$  per  $t = 4/n$ , 0 per  $t = 6/n$ . Calcolare:

1. Il limite  $u$  di  $u_n$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  per  $n \rightarrow \infty$ .
2. Il limite di  $\hat{u}_n = \mathcal{F}[u_n]$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
3. La derivata seconda  $\frac{d^2}{dt^2}u_n$ .
4. La trasformata di Fourier di  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1(t - 6k)$ .

**Esercizio 2** Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ; calcolare  $g_1 := \delta''f$ ,  $g_2 := \frac{d}{dt}(\delta'f)$ ,  $g_3 := \frac{d^2}{dt^2}(\delta f)$ . Per quali funzioni  $f$   $g_1 = g_2 = g_3$ ?

**Esercizio 3** Sia  $\mathcal{T}$  il filtro causale che ad ogni  $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  associa la soluzione  $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$  dell'equazione

$$H(t) \cos ht * u - H(t) \sin t * \left(\frac{d}{dt}u\right) = f$$

Rappresentare  $\mathcal{T}$  come prodotto di convoluzione.

**Esercizio 4** Calcolare la trasformata di Fourier di  $u(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \frac{2}{3}n} \delta(t - n)$ .

**Esercizio 5** Sia  $\mathcal{A}$  il filtro causale discreto che ad ogni segnale  $V = \{V^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  associa il segnale  $U = \{U^n\} = \mathcal{A}[V]$  definito da

$$U^n := \frac{1}{2}(V^n + V^{n-1}).$$

Esprimere  $V := \mathcal{A}^{-1}[U]$  in forma di convoluzione discreta e studiare la stabilità del filtro  $\mathcal{A}^{-1}$ .

Trovare un segnale illimitato  $V$  tale che  $\mathcal{A}[V]$  è limitato.

**Esercizio 6** Mostrare che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni distribuzione a supporto compatto  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ,  $t^k * u$  è un polinomio, determinandone i coefficienti.

Valutazione degli esercizi

Esercizio	1	2	3	4	5	6	<b>TOTALE</b>

Indicare qui di seguito se si intende sostenere l'orale subito oppure dopo il 5 luglio