Prova scritta di *Modelli e Metodi matematici B*, 6 settembre 2004

Cognome	Nome

Esercizio 1 *a*) Per $\tau > 0$ sia u_τ il segnale discreto

$$U_\tau := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big(\operatorname{sinc}(n\tau)\big)^2 \delta(t - n\tau), \quad \operatorname{sinc} t := \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Determinare, disegnandola, la trasformata di Fourier $\hat{U}_\tau$ di U_τ per $\tau = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$. Per quali valori di τ $\hat{U}_\tau(f)$ è una costante indipendente dalla frequenza f?
b) Si considerino il passo $\tau = \frac{1}{2}$ e i due segnali

$$V := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big(\operatorname{sinc}(n/2)\big)^2 \delta(t - (n/2 + 1/4)), \quad W := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big(\operatorname{sinc}(n/2 + 1/4)\big)^2 \delta(t - (n/2 + 1/4)).$$

Dopo aver descritto la relazione tra questi segnali, $U_{1/2}$ e $\operatorname{sinc}^2 t$, determinare le trasformate di Fourier di V e W.

Esercizio 2 Per $v \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ sia $u = \mathscr{T}[v] \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ la soluzione dell'equazione

$$\big(u^{(4)} - u\big) * \big(H(t)\cos t\big) = v \quad \text{in } \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}).$$

Calcolare $\mathscr{T}[\delta]$, $\mathscr{T}[\delta']$, $\mathscr{T}[\delta''(t-2)]$, $\mathscr{T}[H(t+1)]$.

Esercizio 3 1) Calcolare $u := (\delta - \delta') * (\delta + \delta') * (\delta - \delta') * (\delta + \delta')$.
2) Trovare le soluzioni **temperate** v, w delle equazioni **in** $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$-v' + v = \delta, \quad v' + v = \delta$$

3) Esprimere mediante v, w una soluzione in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ di

$$u^{(4)} - 2u'' + u = \delta' \qquad (\star)$$

Sono possibili altre soluzioni tra le distribuzioni temperate?
4) Trovare la soluzione **causale** dell'equazione $(\star)$ e confrontarla con quella trovata in precedeza.

Esercizio 4 Sia $B = (B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ il segnale discreto definito da $B^n := b2^{-n}$. Calcolare la trasformata $\mathcal{Z}\ \mathcal{B}(z)$ di B. Risolvere poi l'equazione alle differenze per $n \geq 0$

$$\begin{cases} U^n = aU^{n-1} + b2^{-n} & n = 1, \dots, \\ U^0 = b \end{cases}$$

(Facoltativo) Siano poi $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ due filtri lineari, causali e tempo invarianti e si costruisca una successione di filtri $\big(\mathscr{T}^n\big)_n$ definita da

$$\begin{cases} \mathscr{T}^n[u] = \mathscr{A}[\mathscr{T}^{n-1}[u]] + 2^{-n}\mathscr{B}[u] & n = 1, \dots, \\ \mathscr{T}^0[u] := \mathscr{B}[u]. \end{cases}$$

Determinare la funzione di trasferimento di $\mathscr{T}^n$ in termini delle funzioni di trasferimento di $\mathscr{A}$ e di $\mathscr{B}$; trovare condizioni su queste ultime perché esista il filtro limite $\mathscr{T}[u] := \lim_{n\to\infty} \mathscr{T}^n[u]$ e risulti stabile.

Esercizio 5 (Facoltativo, per i matematici) Si consideri la funzione $s_\varepsilon(t) := \frac{1}{t}$ se $|t| > \varepsilon$, $s_\varepsilon(t) = 0$ se $|t| \leq \varepsilon$; sia poi s la distribuzione v.p.$\frac{1}{t}$.
1) Mostrare che $s_\varepsilon * \phi \to s * \phi$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
2) Mostrare che $s_\varepsilon * \phi \to s * \phi$ in $L^2(\mathbb{R})$, $\forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
3) Mostrare che $s_\varepsilon * u \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ e $s_\varepsilon * u \to s * u$ in $L^2(\mathbb{R})$.
4) Mostrare il punto 2 (e poi il punto 3) per la convergenza (debole) in $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.
5) Mostrare il punto 4 per la convergenza forte in $L^p(\mathbb{R})$.

Valutazione degli esercizi

Esercizio	1	2	3	4	5	**TOTALE**

Indicare qui di seguito se si intende sostenere l'orale in questa settimana oppure nella prossima.