

Prova scritta di *Modelli e Metodi matematici II*, 5 luglio 2004

COGNOME	NOME

Esercizio 1 Per $n \in \mathbb{N}$ sia u_n la funzione reale definita da

$$u_n(t) := \begin{cases} (nt)^2 & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e sia $v_n := \Delta_{2/n} * u_n$ (al solito, Δ_a è la misura di campionamento a passo a $\Delta_a := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-ka)$).

Calcolare: 1) Le derivate prime e seconde di u_n e di v_n

2) Le trasformate di Fourier di u_n e di v_n

3) I limiti di u_n e di v_n in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $n \rightarrow \infty$.

Esercizio 2 Per $v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ sia $u = \mathcal{T}[v] \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ la soluzione dell'equazione

$$(u^{(4)} - u) * (H(t) \cos t) = v \quad \text{in } \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}).$$

Calcolare $\mathcal{T}[\delta]$, $\mathcal{T}[\delta']$, $\mathcal{T}[\delta''(t-2)]$, $\mathcal{T}[H(t+1)]$.

Esercizio 3 1) Calcolare $u := (\delta - \delta') * (\delta + \delta') * (\delta - \delta') * (\delta + \delta')$.

2) Trovare le soluzioni **temperate** v, w delle equazioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$-v' + v = \delta, \quad v' + v = \delta$$

3) Esprimere mediante v, w una soluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ di

$$u^{(4)} - 2u'' + u = \delta' \tag{*}$$

Sono possibili altre soluzioni tra le distribuzioni temperate?

4) Trovare la soluzione **causale** dell'equazione (*) e confrontarla con quella trovata in precedenza.

Esercizio 4 Sia $B = (B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ il segnale discreto definito da $B^n := b2^{-n}$. Calcolare la trasformata $\mathcal{Z} \mathcal{B}(z)$ di B . Risolvere poi l'equazione alle differenze per $n \geq 0$

$$\begin{cases} U^n = aU^{n-1} + b2^{-n} & n = 1, \dots, \\ U^0 = b \end{cases}$$

(Facoltativo) Siano poi \mathcal{A}, \mathcal{B} due filtri lineari, causali e tempo invarianti e si costruisca una successione di filtri $(\mathcal{T}^n)_n$ definita da

$$\begin{cases} \mathcal{T}^n[u] = \mathcal{A}[\mathcal{T}^{n-1}[u]] + 2^{-n}\mathcal{B}[u] & n = 1, \dots, \\ \mathcal{T}^0[u] := \mathcal{B}[u]. \end{cases}$$

Determinare la funzione di trasferimento di \mathcal{T}^n in termini delle funzioni di trasferimento di \mathcal{A} e di \mathcal{B} ; trovare condizioni su queste ultime perché esista il filtro limite $\mathcal{T}[u] := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n[u]$ e risulti stabile.

Esercizio 5 (Facoltativo, per i matematici) Si consideri la funzione $s_\varepsilon(t) := \frac{1}{t}$ se $|t| > \varepsilon$, $s_\varepsilon(t) = 0$ se $|t| \leq \varepsilon$; sia poi s la distribuzione v.p. $\frac{1}{t}$.

1) Mostrare che $s_\varepsilon * \phi \rightarrow s * \phi$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2) Mostrare che $s_\varepsilon * \phi \rightarrow s * \phi$ in $L^2(\mathbb{R})$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3) Mostrare che $s_\varepsilon * u \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ e $s_\varepsilon * u \rightarrow s * u$ in $L^2(\mathbb{R})$.

4) Mostrare il punto 2 (e poi il punto 3) per la convergenza (debole) in $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

5) Mostrare il punto 4 per la convergenza forte in $L^p(\mathbb{R})$.

Valutazione degli esercizi

Esercizio	1	2	3	4	5	TOTALE

Indicare qui di seguito se si intende sostenere l'orale in questa settimana oppure nella prossima.