Esercizi in preparazione alla seconda prova in itinere dell'esame di
Metodi e Modelli Matematici II,
anno accademico 2007/2008

Esercizio. Calcolare trasformata zeta e trasformata di Laplace di

$$U := \sum_{n\geq 0} n^2\delta(t-n), \quad V := \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)}{4^n}\delta(t-2n)$$
$$W := \sum_{n\geq 0} \cos^2(n\pi/3)\delta(t-n), \quad X := \sum_{n\geq 0} n2^n\cos(n)\delta(t-n)$$
$$Y := \sum_{n\geq 2} \delta(t-n), \quad A := \sum_{n\geq -3} \delta(t-3n), \quad B := \sum_{n\geq 0} \delta(t-2n+1)$$

Esercizio. Mantenendo le definizioni dell'esercizio precedente, e indicando con $H = \sum_{n\geq 0} \delta(t-n)$, calcolare
$$H * U, \quad Y * H, \quad \delta(t-3) * A, \quad A * Y, \quad X * Y.$$

Esercizio. Determinare la soluzione U dell'equazione alle differenze
$$U^0 = 1, \quad U^1 = 0, \quad U^{n+2} - \sqrt{2}U^{n+1} + U^n = 0 \quad \text{per } n \geq 0.$$

Esercizio. Sia $\omega \in [0, +\infty)$ un parametro nonnegativo e sia $\mathscr{T}_\omega$ il filtro *causale e discreto* che ad ogni segnale discreto $U = \sum_n U^n\delta(t-n)$ associa la soluzione causale $V := \mathscr{T}_\omega[U]$ dell'equazione alle differenze
$$V^{n+2} + V^{n+1} + \omega^2 V^n = U^{n+2} + U^{n+1}.$$
Stabilire per quali valori di $\omega \geq 0$ il filtro è (fortemente) stabile (*attenzione alle radici complesse!*)

Determinare la risposta impulsiva di $\mathscr{T}_\omega$ per $\omega := 5/6$.

Per $\omega := 5/6$ determinare la soluzione dell'equazione alle differenze corrispondente ai segnali $U := \delta(t-1) - 4\delta(t)$ e $U := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$.

Esercizio. Calcolare i prodotti di convoluzione
$$u(t) := \Big(\mathrm{rect}\,(t) - \frac{1}{2}\mathrm{rect}\,(t-1)\Big) * ⧢_1\,(t), \quad v(t) := \big(t\,\mathrm{rect}\,(t/4)\big) * ⧢_3\,(t).$$

Esercizio. Calcolare
$$u(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(k/2)\mathrm{sinc}(2t-k), \quad v(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(k/2)\mathrm{sinc}(4t-k),$$
$$w(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(k)\mathrm{sinc}(t-k), \quad z(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^7(k/7)\mathrm{sinc}(7t-k)$$

Esercizio. Sia $\mathscr{T}$ la trasformazione che ad ogni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ associa l'unica soluzione in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale
$$v'' + v' + v = u$$
Mostrare che $\mathscr{T}$ è un filtro lineare, tempo invariante, stabile e causale, calcolandone la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento.