

Esercizi in preparazione alla prova scritta dell'esame di  
**Metodi e Modelli Matematici II**,  
 anno accademico 2004/2005

**Esercizio.** Calcolare la derivata prima e seconda distribuzionale dei segnali

$$u(t) := \text{sign}(t)(1-t), \quad v(t) := (\cos t)^+. \quad (s^+ \text{ è la parte positiva di } s).$$

**Esercizio.** Calcolare le distribuzioni

$$u(t) := \delta''(t-1)t^2, \quad v(t) := \sin(\pi t) \sqcup \sqcup (t-1/2), \quad w(t) := \sqcup \sqcup (3t-1).$$

**Esercizio.** Calcolare le trasformate di Fourier di

$$u(t) := (t-1)e^{2\pi it} - \delta'(t+1), \quad v(t) := \cos^3(2\pi t), \quad w(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \geq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$z(t) := |\cos t|, \quad h(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} te^{int}, \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \delta(t-n)$$

**Esercizio.** Calcolare

$$u(t) := (\delta(t-1) + 4\delta'(t+1)) \star \chi_{(0,1)}, \quad v(t) := H(t)e^{-t} \star \delta'(t-1) \star H(t)$$

**Esercizio.** Determinare le soluzioni  $u, v, w, z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  di

$$u(t) \sin t = 1, \quad (t^4 - 1)v(t) = 0, \quad (t-1)w(t) = \delta, \quad tz(t) = \delta.$$

**Esercizio.** Calcolare i limiti nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - (nt)^2)^+, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(nt), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos nt)^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(t-n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\delta(t-1/n) - \delta(t+2/n)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \text{rect}(nt-1/2) - \text{rect}(nt+1/2) \right),$$

**Esercizio.** Calcolare le soluzioni in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dell'equazione differenziale

$$x'' + x' + x = e^{2\pi iat}, \quad y'' + y' + y = te^{2\pi iat}.$$

Sia poi  $\mathcal{T}$  la trasformazione che ad ogni  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  associa l'unica soluzione in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dell'equazione differenziale

$$v'' + v' + v = u$$

Mostrare che  $\mathcal{T}$  è un filtro lineare, tempo invariante, stabile e causale, calcolandone la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento.