Esercizi in preparazione alla prova scritta dell'esame di
Metodi e Modelli Matematici B,
anno accademico 2003/2004

Esercizio. Sia u la funzione

$$\begin{cases} (1-|t|) & \text{se } -1 \le t \le 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Posto $\Delta_1 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ calcolare

$$v := \Delta_1 \star u, \quad w_k := \frac{d^k}{dt^k} v \quad \text{k=1,2,3.}$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di w_2.

Esercizio. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(t) := \text{v.p.}\frac{t^3}{t-1}, \quad v(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(\delta(t-2n) - \delta(t-2n-1)\Big).$$

Esercizio. Per $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri il filtro $\mathscr{T}_\alpha$ che ad ogni segnale causale f associa la soluzione causale $u_\alpha := \mathscr{T}_\alpha[f]$ dell'equazione

$$\frac{d}{dt}u(t) + \alpha u(t) - (1+\alpha)\int_{-\infty}^{t} \cos(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t)$$

nel senso delle distribuzioni. Si esprima $\mathscr{T}_\alpha$ come convoluzione. Per quali valori di α $\mathscr{T}_\alpha$ è stabile?

Esercizio. Calcolare i prodotti di convoluzione:

$$u(t) := \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-n)\Big) \star \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-n)\Big), \quad v(t) := e^{it} \star \Big(\frac{d}{dt}\text{v.p.}\frac{1}{t+2}\Big)$$

e la trasformata di Laplace (risp. di Fourier) di u (risp. di v).

Esercizio. Scrivere il problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} u^{iv} - u = 0 \quad t > 0 \\ \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0 \end{cases}$$

come equazione di convoluzione tra distribuzioni in $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ e risolverla.

Esercizio. Sia $u(t) := \Big(\text{sinc}(2t)\Big)^8$ e $v(t) := \Big(sin 4\pi t + \cos 2\pi t\Big)^4$. Determinare una condizione ottimale sui parametri $a > 0, N \in \mathbb{N}$ per cui valgano le formule

$$u(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2an)^8 \text{sinc}\Big(\frac{t}{a} - n\Big), \quad \int_{-\pi}^{\pi} v^2(t)\,dt = \frac{2\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} v(2\pi n/N)^2$$