

## Esercizi sulle funzioni olomorfe e sulle trasformate di Laplace

**Esercizio 1** Dire se le seguenti funzioni sono olomorfe (in caso affermativo, precisarne il dominio)

$$\frac{z^2}{e^z}, \quad \operatorname{Re}(z + 3i), \quad (x - iy)^2, \quad \log(3z).$$

**Esercizio 2** Calcolare l'integrale lungo la circonferenza di centro 0 e raggio 2 delle funzioni

$$\frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 - 9)}, \quad \frac{1}{z^6(z^2 + 9i)}, \quad \frac{1}{\cosh z}, \quad \frac{z^2}{e^{\pi iz} - i}$$

**Esercizio 3** Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent delle funzioni

$$u(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}, \quad v(z) = \frac{1}{(z - 1)^2(z - 2)}$$

nel disco di centro 0 e raggio 1, nella corona circolare di centro 0 compresa tra i raggi 1 e 2 e nell'esterno del disco di centro 0 e raggio 2.

**Esercizio 4** Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + i} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha it}}{(t^2 - i)} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + 4\pi^2)^2}$$

**Esercizio 5** Calcolare la trasformata di Laplace dei segnali

$$u(t) := H(t) \sin t \cos 2t, \quad v(t) := H(t)(t \cos t)^2, \quad w(t) := H(t)t^6 e^{-2t}(\cos t + i \sin t), \\ z(t) := \frac{d^3}{dt^3} w(t), \quad x(t) := H(t - 2)(t - 3)e^{t-4}$$

**Esercizio 6** Dire se i seguenti segnali possono essere la trasformata di Laplace di qualche originale

$$\frac{1}{\sin(\pi s)}, \quad \sin s, \quad \frac{1}{|s|^2}, \quad \frac{1}{s^2}$$

**Esercizio 7** Calcolare la trasformata di Laplace inversa dei segnali

$$\mathcal{U}(s) := \frac{1}{(s - 1)(s - 2)(s - 3)}, \quad \mathcal{V}(s) := \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}, \quad \mathcal{W}(s) := \frac{1}{(s + 1)^2(s + 2)(s + 3)}, \\ \mathcal{Z}(s) := \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^s}{s^2 + 1}, \quad \mathcal{X}(s) := \frac{d^2}{ds^2} \frac{s^2 + 4}{(s - 2)^2}.$$

**Esercizio 8** Risolvere le seguenti equazioni differenziali in avanti

$$\begin{cases} u''' - 2u'' + u' - 2u = t \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u^{(iv)} - u = 0 \\ u(0) = 1, u'(0) = 2, u''(0) = 3, u'''(0) = 4. \end{cases}$$