

1. Trasformata di Laplace

Trasformata di Fourier e segnali casuali

In questa lezione ci occuperemo principalmente di segnali *causali*:

Definizione 1.1 (Segnali causali) Un segnale $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice causale se $u(t) \equiv 0$ per $t < 0$.

Supponiamo che u sia un segnale limitato e assolutamente integrabile, e sia $U(f)$ la sua trasformata di Fourier.

Problema 1.2 È possibile capire dalle proprietà di U se il segnale di partenza u è causale?

Esempi

Per $\alpha \in (0, +\infty)$ i segnali

$$u_\alpha(t) := H(t)e^{-\alpha t}, \quad v_\alpha := u_\alpha(-t) = H(-t)e^{\alpha t}, \quad w_\alpha(t) = u_\alpha(t) + v_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$$

forniscono degli esempi istruttivi: sappiamo infatti che

$$U_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha + 2\pi i f}, \quad V_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha - 2\pi i f}, \quad W_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Osserviamo che ciascuna di queste funzioni (in quanto razionale) ha senso anche per frequenze f complesse, può cioè essere estesa in modo naturale al campo complesso e questa estensione risulta inoltre *analitica*, cioè derivabile in senso complesso.

Esse presentano però delle singolarità:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi}i &\in \{f \in \mathbb{C} : \text{Im } f > 0\} \quad \text{per } U_\alpha; \\ -\frac{\alpha}{2\pi}i &\in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\} \quad \text{per } V_\alpha; \\ \pm \frac{\alpha}{2\pi}i &\quad \text{per } W_\alpha. \end{aligned}$$

Quando α tende a 0 queste singolarità si avvicinano sempre più all'asse reale; volendo estendere quindi le trasformate di Fourier al piano complesso *senza* dover incontrare singolarità, siamo costretti a “muoverci” nella direzione del semipiano $\{\text{Im } f < 0\}$ per U_α (trasformata di un segnale causale) mentre per V_α possiamo andare solo nella direzione del semipiano $\{\text{Im } f > 0\}$. Nel caso di W_α si incontrano singolarità in entrambe le direzioni.

La proprietà messa in luce dal precedente esempio è di carattere generale e va sotto il nome di Teorema di Paley-Wiener; eccone una versione semplificata:

Teorema 1.3 (Paley-Wiener) Sia $U(f)$ la trasformata di Fourier di un segnale limitato e assolutamente integrabile. u è causale se e solo se $U(f)$ ammette una estensione analitica e limitata al semipiano complesso $\{\text{Im } f < 0\}$.

Noi non diamo la dimostrazione (non facile) di questo teorema, ma possiamo cercare di capire meglio perché nel caso dei segnali casuali le “frequenze complesse” con

parte immaginaria negativa hanno un ruolo speciale. Il motivo, molto semplice, è legato alla formula che esprime il modulo di un esponenziale complesso:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{o equivalentemente} \quad |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}.$$

Se scriviamo la formula della trasformata di Fourier

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (1.1)$$

e vogliamo stimare il modulo dell'integrando per qualunque $f \in \mathbb{R}$ ci accorgiamo che

$$|u(t)e^{-2\pi ift}| = |u(t)| |e^{-2\pi ift}| = |u(t)| e^{2\pi(\operatorname{Im} f)t}$$

Quando la parte immaginaria di f è zero (il caso usuale della trasformata di Fourier: le frequenze sono reali!), il modulo dell'esponenziale è sempre 1 e quindi l'esistenza dell'integrale in (1.1) è ricondotta all'assoluta integrabilità di u .

Se però vogliamo considerare anche frequenze *complesse* (significative solo da un punto di vista matematico...) allora l'esponenziale modifica considerevolmente l'integrabilità di u poichè se $\operatorname{Im} f > 0$ esso diverge a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ mentre se $\operatorname{Im} f < 0$ l'esponenziale diverge per $t \rightarrow -\infty$. Ma se il segnale u è *causale* esso "cancella" l'esponenziale per i tempi negativi e quindi possiamo scrivere

$$U(f) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-2\pi ift} dt, \quad |u(t)e^{-2\pi ift}| = |u(t)| e^{2\pi(\operatorname{Im} f)t} \leq |u(t)| \quad \text{per } t \geq 0.$$

Dunque $U(f)$ è ben definita anche se $\operatorname{Im} f < 0$, vale la solita limitazione

$$|U(f)| \leq \int_0^{+\infty} |u(t)| dt \quad \forall f \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} f \leq 0,$$

e inoltre si potrebbe mostrare che $U(f)$ è derivabile in senso complesso rispetto a f , dunque analitica e di classe C^∞ .

Un passo verso la trasformata di Laplace

Una volta estesa $U(f)$ al campo complesso, diminuisce il ruolo privilegiato della frequenza (reale) f mentre sembrerebbe più naturale semplificare la formula che definisce la trasformata di Fourier introducendo la nuova variabile complessa

$$\boxed{s := 2\pi if} \quad (1.2)$$

Questa semplice sostituzione, che nel piano complesso è (a meno del fattore 2π) una *rotazione* in senso antiorario di un angolo retto, trasforma il semipiano $\{\operatorname{Im} f \leq 0\}$ nel semipiano $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ e porta naturalmente alla definizione di trasformata di Laplace:

Definizione 1.4 (Trasformata di Laplace) Sia u un segnale causale; la trasformata di Laplace $\mathcal{U}(s) = \mathcal{L}[u](s)$ di u è definita dall'integrale

$$\mathcal{U}(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st} dt \quad (1.3)$$

per tutte i valori di $s \in \mathbb{C}$ per cui la funzione $t \mapsto u(t)e^{-st}$ è assolutamente integrabile. Chiamiamo dominio $D(\mathcal{U})$ di \mathcal{U} l'insieme di tali valori.

Useremo spesso la notazione (molto imprecisa ma comoda)

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}(s) \quad \text{oppure} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad (1.4)$$

per indicare la trasformata di Laplace e

$$\mathcal{U}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) \quad \text{oppure} \quad \mathcal{U}(s) \sqsubset u(t) \quad (1.5)$$

per indicare la sua inversa.

Precisazione

Segnali \mathcal{L} -trasformabili. Diremo che un segnale u è \mathcal{L} -trasformabile quando u è causale e il dominio di \mathcal{U} contiene almeno un punto. Come vedremo, in questo caso il dominio di \mathcal{U} contiene automaticamente tutto un semipiano destro del tipo $\text{Re } s > \lambda$.

Benché modellata su quanto detto sopra, la definizione che abbiamo appena dato è più generale, in quanto *non* abbiamo supposto che u sia assolutamente integrabile; vedremo anzi che uno dei punti a favore della trasformata di Laplace è quello di trattare anche segnali non limitati, addirittura a crescita esponenziale.

Possiamo però già stabilire una relazione fondamentale

Osservazione 1.5 (Laplace e Fourier) Se u è un segnale casuale e assolutamente integrabile, allora il dominio della sua trasformata di Laplace contiene il semipiano $\{\text{Re } s \geq 0\}$ ed in particolare l'asse immaginario. Lungo quest'ultimo, la trasformata di Laplace coincide con la trasformata di Fourier di u mediante la relazione

$$\mathcal{U}(2\pi if) = U(f). \quad (1.6)$$

Come è fatto il dominio di \mathcal{U} ? Dalle stime precedenti si dimostra facilmente il seguente risultato:

Lemma 1.6 Se $D(\mathcal{U})$ contiene un punto $s_0 \in \mathbb{C}$ allora contiene tutto il semipiano (chiuso) $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \geq \text{Re } s_0\}$ a destra di s_0 .

Come conseguenza si ha:

Definizione 1.7 (Dominio della trasformata di Laplace) Se u è Laplace-trasformabile (cioè se $D(\mathcal{U})$ contiene almeno un punto...) allora esiste un unico numero reale $\lambda = \lambda_u$ dipendente da u e chiamato ascissa di convergenza della trasformata di Laplace o ascissa di assoluta trasformabilità tale che

$$\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > \lambda\} \subset D(\mathcal{U}), \quad \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s < \lambda\} \cap D(\mathcal{U}) = \emptyset. \quad (1.7)$$

In altre parole: il semipiano destro (aperto) $\text{Re } s > \lambda$ è il più grande semipiano destro (aperto) contenuto in $D(\mathcal{U})$ e non vi sono punti di $D(\mathcal{U})$ alla sinistra della retta $\text{Re } s = \lambda$. Invece non si può concludere nulla a priori sul comportamento di \mathcal{U} lungo questa retta.

Due criteri sono piuttosto utili in pratica:

Attenzione! *Il dominio dipende da u .* A differenza della trasformata di Fourier, il dominio di una trasformata di Laplace \mathcal{U} dipende dal segnale originale u . A segnali diversi corrispondono trasformate definite in semipiani generalmente differenti.

Criterio 1.8 (Segnali a crescita esponenziale) *Un segnale causale u si dice a crescita esponenziale se esistono costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|u(t)| \leq Ae^{Bt} \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (1.8)$$

Se u è a crescita esponenziale, allora è \mathcal{L} -trasformabile e $\lambda_u \leq B$.

Nota Se u è localmente limitato, basta controllare la (1.8) per $t \uparrow +\infty$.

Criterio 1.9 (Ascissa di convergenza e fattori polinomiali) *Se u è \mathcal{L} -trasformabile e P è un polinomio (o una funzione a crescita polinomiale), anche Pu è \mathcal{L} -trasformabile e ha la medesima ascissa di convergenza.*

Esempi

$$\begin{aligned} H(t) &\square \frac{1}{s} \\ H(t)e^{\alpha t} &\square \frac{1}{s - \alpha} \\ H(t)t^k e^{\alpha t} &\square \frac{k!}{(s - \alpha)^{k+1}} \\ H(t) \cos \omega t &\square \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ H(t) \sin \omega t &\square \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Abbiamo visto che se la retta immaginaria fa parte del dominio di \mathcal{U} , allora $\mathcal{U}(2\pi if) = \mathcal{U}(f)$.

Problema 1.10 *È possibile stabilire un legame tra trasformata di Laplace e Fourier anche se $D(\mathcal{U})$ non contiene l'asse immaginario?*

L'idea è molto semplice: basta scrivere

$$s = r + 2\pi if, \quad r = \operatorname{Re} s, \quad f = \frac{\operatorname{Im} s}{2\pi}. \quad (1.9)$$

Si verifica subito che

$$u(t) \square \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t)e^{-rt} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{U}(r + 2\pi if) \quad (1.10)$$

In altre parole, lungo l'asse verticale di ascissa r la trasformata di Laplace (a meno del solito fattore 2π) coincide con la trasformata di Fourier del segnale (smorzato, se $r > 0$) $u(t)e^{-rt}$.

Proprietà fondamentali

Proprietà qualitative e formula di inversione

Teorema 1.11 (Comportamento asintotico) *Se u è un segnale \mathcal{L} -trasformabile allora \mathcal{U} è analitica nel semipiano $\operatorname{Re} s > \lambda$, limitata “lontano” dalla retta $\operatorname{Re} s = \lambda$ e*

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(s) = 0} \quad (1.11)$$

Inoltre se esiste il limite $u(0+) = \lim_{t \downarrow 0} u(t)$ allora

$$u(0+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{U}(s) \quad (1.12)$$

mentre se esiste il limite $u(+\infty) = \lim_{t \uparrow +\infty} u(t)$ allora

$$u(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \mathcal{U}(s). \quad (1.13)$$

Commento.

Le formule (1.12) ed (1.13) vanno anche sotto il nome di *formula del valore iniziale* e *formula del valore finale*, rispettivamente. Sono possibili anche varianti più complicate, ad esempio

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{u(t)}{t^k} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^{k+1}}{k!} \mathcal{U}(s), \quad \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{u(t)}{t^k} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s^{k+1}}{k!} \mathcal{U}(s) \quad (1.14)$$

sempre nelle ipotesi che il limite nel membro di destra dell'identità esista.

Sfruttando il legame (1.10) con la trasformata di Fourier si ottiene la *Formula di inversione di Riemann*:

Teorema 1.12 (Formula di inversione di Riemann) *Sia u un segnale regolare a tratti e \mathcal{L} -trasformabile, $\mathcal{U}(s)$ la trasformata di Laplace di u definita nel semipiano $\operatorname{Re} s > \lambda$. Per ogni $r > \lambda$ si ha*

$$\frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \mathcal{U}(s) e^{st} ds. \quad (1.15)$$

Corollario 1.13 (Iniettività della trasformata di Laplace) *Se due segnali hanno la medesima trasformata di Laplace allora coincidono.*

Alcuni commenti:

Commento.

Il valor principale in (1.15) significa al solito

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{Y \uparrow +\infty} \int_{r-iY}^{r+iY} \mathcal{U}(s) e^{st} ds. \quad (1.16)$$

Quest'ultimo integrale va inteso in senso complesso: introdotta la parametrizzazione $s = r + 2\pi i f$, $f \in [-Y/2\pi, Y/2\pi]$, si ha $ds = 2\pi i$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{r-iY}^{r+iY} \mathcal{U}(s) e^{st} ds = \int_{-Y/2\pi}^{Y/2\pi} \mathcal{U}(r + 2\pi i f) e^{rt + 2\pi i f t} df = e^{rt} \int_{-Y/2\pi}^{Y/2\pi} \mathcal{U}(r + 2\pi i f) e^{2\pi i f t} df \quad (1.17)$$

che è appunto la formula di inversione di Fourier.

L'aspetto interessante è che per valutare l'integrale di (1.15) si possono usare tutte le tecniche dell'analisi complessa, in particolare la Formula dei residui e il Lemma di Jordan.

Commento.

Un aspetto abbastanza sorprendente della formula (1.15) è che l'integrale *non* dipende da r : questo è conseguenza del Teorema di Cauchy, che stabilisce l'invarianza degli integrali complessi rispetto a deformazioni del cammino che non attraversino singolarità dell'integrando.

Commento.

Un altro aspetto non ovvio è che se si calcolasse l'integrale per $t < 0$ si otterrebbe comunque 0, essendo u causale. Anche questo fatto è codificato nell'analiticità di \mathcal{U} , ed è una conseguenza del teorema di Paley-Wiener.

Attenzione!

Valore di u per $t = 0$. Quando si calcola la formula (1.15) per $t = 0$ bisogna sempre tener conto che $u(t_-) = 0$, anche se u è continua a destra.

Proprietà elementari

La trasformata di Laplace eredita solo alcune delle proprietà elementari della trasformata di Fourier: *non hanno più senso* il principio di dualità (il dominio della trasformata è completamente diverso dal dominio di u , la trasformata inversa non è più collegata alla trasformata coniugata), cambiamenti di scala con fattore negativo (distruggono la causalità del segnale u), parità e disparità (sempre perché u è causale), anticipi (cioè ritardi negativi). Si tenga poi conto che $\mathcal{U}(0)$ non è sempre definito.

Linearità

$$\text{se } u_i(t) \sqsupset \mathcal{U}_i(s) \text{ allora } \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \sqsupset \alpha_1 \mathcal{U}_1(s) + \alpha_2 \mathcal{U}_2(s).$$

Segnali reali

$$\text{Se } u \text{ è reale allora } \mathcal{U} \text{ è Hermitiano, cioè } \mathcal{U}(\bar{s}) = \overline{\mathcal{U}(s)}. \quad (1.18)$$

Significato di $\mathcal{U}(0)$

$$\mathcal{U}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \text{ è semplicemente l'integrale di } u, \text{ quando è definito.} \quad (1.19)$$

Cambiamenti di scala Se $\lambda > 0$ è un fattore di cambiamento di scala allora

$$\text{se } u(t) \sqsupset \mathcal{U}(f) \text{ allora } u(t/\lambda) \sqsupset \lambda \mathcal{U}(\lambda f) \quad (1.20)$$

Ritardi Dato un segnale u e un ritardo *positivo* $\tau > 0$, ricordiamo che $R_\tau[u]$ è il corrispondente segnale *ritardato di* τ

$$R_\tau[u](t) := u(t - \tau).$$

Si ha

$$\text{se } u(t) \sqsupset \mathcal{U}(f) \text{ allora } u(t - \tau) \sqsupset e^{-\tau s} \mathcal{U}(s). \quad (1.21)$$

Attenzione!

Occorre pensare il segnale u definito su tutto \mathbb{R} . Poiché u è causale, nella definizione di ritardo è implicito che $R_\tau[u](t) \equiv 0$ se $t < \tau$.

Modulazione Modulare un segnale u significa moltiplicarlo per un segnale esponenziale del tipo $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. A differenza della trasformata di Fourier, α può essere arbitrario. Si ha

$$\text{se } u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \text{ allora } e^{\alpha t} u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s - \alpha). \quad (1.22)$$

Da questa formula si deduce facilmente che

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) u(t) &\sqsupset \frac{1}{2} [\mathcal{U}(s - i\omega) + \mathcal{U}(s + i\omega)], \\ \sin(\omega t) u(t) &\sqsupset \frac{1}{2i} [\mathcal{U}(s - i\omega) - \mathcal{U}(s + i\omega)]. \end{aligned}$$

Proprietà significative

Derivazione Se u è \mathcal{L} -trasformabile, e continua (salvo al più in $t = 0$: indichiamo con $u(0+)$ il valore di u da destra) allora

$$\boxed{\text{se } u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \text{ allora } \frac{d}{dt}u(t) \sqsupset s\mathcal{U}(s) - u(0+).} \quad (1.23)$$

In particolare, se u è continua anche in 0 si ha

$$u(0+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(t) \sqsupset s\mathcal{U}(s). \quad (1.24)$$

Se u è \mathcal{L} -trasformabile allora

$$\boxed{u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad t u(t) \sqsupset -\frac{d}{ds}\mathcal{U}(s).} \quad (1.25)$$

Convolluzione Se u, v sono \mathcal{L} -trasformabili allora $u * v$ è \mathcal{L} -trasformabile e

$$\boxed{u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s), v(t) \sqsupset \mathcal{V}(s) \quad \Rightarrow \quad u * v \sqsupset \mathcal{U}(s)\mathcal{V}(s).} \quad (1.26)$$

Da queste due formule se ne ricavano altre:

Primitiva causale Se u è causale vi è un'unica primitiva di u che è ancora causale e si può esprimere mediante convolluzione come $H * u$,

$$H * u(t) = H(t) \int_0^t u(r) dr.$$

Grazie alla (1.26) si ha che

$$u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad H * u \sqsupset \frac{\mathcal{U}(s)}{s} \quad (1.27)$$

che fornisce quindi la trasformata della **primitiva causale** di u .

Divisione per t Analogamente, se u e $u(t)/t$ sono \mathcal{L} -trasformabili (quindi in particolare deve essere $u(0+) = 0$) allora

$$u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{u(t)}{t} \sqsupset \int_s^{+\infty} \mathcal{U}(r) dr, \quad (1.28)$$

Segnali periodici Se u è della forma $H(t)v(t)$ con v T -periodico, la sua trasformata si può calcolare con un'integrazione su un solo periodo:

$$u(t) \sqsupset \frac{\int_0^T u(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}}. \quad (1.29)$$