

# 1. Trasformata di Fourier

Affrontiamo il problema di rappresentare mediante funzioni trigonometriche segnali *non* periodici: evidentemente, questi non possono più ottenersi come sovrapposizione di onde che vibrano a frequenze multiple di una fissata frequenza fondamentale (che genererebbero un segnale periodico); occorre quindi un procedimento più sofisticato che viene fornito dalla teoria della *trasformata di Fourier*.

In questa lezione consideriamo segnali che, in un senso opportuno (di tipo “integrale”), decadono a 0 abbastanza velocemente per tempi grandi: il prototipo su cui imposteremo inizialmente il discorso sarà quello dei segnali di durata finita. Solo la teoria delle distribuzioni, sviluppata nei corsi più avanzati, permette di trattare segnali di tipo più generale e di comprendere all’interno della medesima teoria anche il caso dei segnali periodici.

Ci limiteremo anche a considerare segnali *limitati* e daremo sempre per scontato che si tratti di segnali misurabili. Ricordiamo che *segnale limitato* significa che esiste una costante  $M \geq 0$  tale che

$$|u(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad \text{in particolare} \quad \sup_{\mathbb{R}} |u| \leq M. \quad (1.1)$$

**Definizione 1.1 (Segnali di durata limitata)** Diciamo che un segnale  $u$  definito in  $\mathbb{R}$  ha durata limitata se esiste  $D > 0$  tali che

$$u(t) = 0 \quad \text{al di fuori dell'intervallo } (-D, D). \quad (1.2)$$

Chiamiamo durata di  $u$  la più piccola delle costanti  $2D$  degli intervalli che soddisfano la (1.2).

**Definizione 1.2 (Segnali assolutamente integrabili e segnali con energia finita)**

Diciamo che un segnale  $u$  definito in  $\mathbb{R}$  è assolutamente integrabile e scriviamo  $u \in L^1(\mathbb{R})$  se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt := \lim_{R \uparrow +\infty} \int_{-R}^R |u(t)| dt < +\infty \quad (1.3)$$

Diciamo che  $u$  ha energia finita e scriviamo  $u \in L^2(\mathbb{R})$  se

$$\mathcal{E}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt := \lim_{R \uparrow +\infty} \int_{-R}^R |u(t)|^2 dt < +\infty \quad (1.4)$$

**Nota**

I segnali (limitati) di durata limitata sono sempre assolutamente integrabili e vale la ovvia relazione

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \leq 2MD, \quad (1.5)$$

dove  $M, D$  sono le costanti di (1.1) e (1.2). I segnali (limitati) assolutamente integrabili hanno sempre energia finita e vale la

$$\mathcal{E}[u] \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt. \quad (1.6)$$

Consideriamo ora un segnale continuo  $u$  di durata  $2D$  e regolare a tratti. Se scegliamo un "periodo"  $T > 2D$  e chiamiamo  $f_0 = \frac{1}{T}$  la relativa frequenza fondamentale, possiamo esprimere  $u$  in serie di Fourier

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n f_0 t}, \quad t \in (-T/2, T/2), \quad \text{con} \quad (1.7)$$

$$c_n := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i n f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-2\pi i n f_0 t} dt. \quad (1.8)$$

Ora, l'ultimo integrale ha senso anche se l'esponenziale oscilla a qualsiasi frequenza  $f$ , non necessariamente multipla di  $f_0$ . Poiché questa si rivelerà la quantità cruciale, poniamo

$$U(f) := \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad \forall f \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Con questa notazione la serie di (1.7) diventa

$$u(t) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} U(n f_0) e^{2\pi i n f_0 t} = f_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(n f_0), \quad \text{dove } \mathcal{U}(f) := U(f) e^{2\pi i f t}, \quad (1.10)$$

e, lo ricordiamo, la convergenza della serie è intesa in senso puntuale.

L'aspetto interessante è che nella relazione precedente noi siamo liberi di rendere  $f_0$  piccolo quanto vogliamo, poichè l'unico vincolo è dato da

$$T > 2D \quad \text{cioè } f_0 < \frac{1}{2D}.$$

Di conseguenza

$$u(t) = \lim_{f_0 \downarrow 0} f_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(n f_0). \quad (1.11)$$

Non sarebbe difficile dimostrare che quest'ultimo limite è proprio l'integrale di  $\mathcal{U}$  esteso a tutto  $\mathbb{R}$ . Tenendo conto di come è stato definito  $\mathcal{U}$  otteniamo

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{2\pi i f t} df.$$

Questa formula è la formula fondamentale della teoria della trasformata di Fourier e prende il nome di *formula di inversione*. Raccogliamo il risultato nel lemma seguente:

**Lemma 1.3** *Se  $u$  è un segnale continuo di durata finita e regolare a tratti, la funzione  $U$  definita da (1.9) appartiene a  $L^1(\mathbb{R})$ , e vale la formula di inversione*

$$\boxed{u(t) = \int_{\mathbb{R}} U(f) e^{2\pi i f t} df \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \quad (1.12)$$

A questo punto si tratta di studiare sistematicamente le proprietà della trasformazione (1.9), sia per conoscerne le caratteristiche più approfonditamente, sia per estendere il più possibile la validità della (1.12).

**Definizione 1.4 (Trasformata di Fourier)** La trasformata di Fourier  $U = \mathcal{F}[u]$  di un segnale  $u \in L^1(\mathbb{R})$  è definita da

$$U(f) := \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-2\pi i ft} dt, \quad \forall f \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

La trasformata coniugata  $\check{U} = \overline{\mathcal{F}[u]}$  è definita da

$$\check{U}(f) := \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{2\pi i ft} dt, \quad \forall f \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Quando  $u \notin L^1(\mathbb{R})$  (cioè non è assolutamente integrabile) gli integrali di (1.13) e (1.14) sono intesi nel senso del valor principale.

Useremo spesso la notazione (molto imprecisa ma comoda)

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f), \quad U(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(t) \quad (1.15)$$

per indicare la trasformata di Fourier e la sua inversa.

Richiami

**Valor principale.** Quando  $u$  non è assolutamente integrabile, l'integrale che definisce la trasformata non esiste in senso assoluto; ciò nonostante, almeno se  $u$  è a energia finita, si può ancora parlare di trasformata ricorrendo al cosiddetto *valor principale* dell'integrale, che per un generico segnale (limitato)  $v$  è definito da

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt = \lim_{R \uparrow +\infty} \int_{-R}^R v(t) dt, \quad (1.16)$$

quando il limite esiste finito. Nella definizione (1.16) è *fondamentale* che gli estremi di integrazione vadano all'infinito in *modo simmetrico*, condizione superflua quando  $v$  è assolutamente integrabile. In altre parole, se ad esempio si considerasse il limite

$$\lim_{R \uparrow +\infty} \int_{-R}^{2R} v(t) dt,$$

si otterrebbe il medesimo risultato di (1.16) se  $v \in L^1(\mathbb{R})$ , mentre se  $v \notin L^1(\mathbb{R})$  in generale i due limiti sono differenti. Vedremo più avanti che, dal punto di vista dell'inversione della trasformata di Fourier, l'uso del valor principale è molto naturale.

Quando  $u$  non è assolutamente integrabile, l'uso del valor principale non risolve tutti i problemi: chi ci assicura che il limite che lo definisce esiste?

È possibile dimostrare (ma si tratta di un Teorema molto difficile, forse uno dei Teoremi più difficili dimostrati nel secolo scorso) che se  $u$  ha energia finita il valor principale esiste sempre, salvo al più per una certo numero (purtroppo anche infinito...) di frequenze, che comunque non compromettono la possibilità di definire la trasformata di Fourier e di applicare la formula di inversione. Per enunciare correttamente questo risultato occorrerebbe aver sviluppato una teoria dell'integrazione più raffinata; lavorando con segnali regolari a tratti e supponendo (come sempre accade negli esempi di calcolo) che la formula (1.13), intesa nel senso del valor principale, sia ben definita salvo un numero *finito* di frequenze, è possibile evitare tutte queste questioni più delicate.

## I teoremi fondamentali

Quando il segnale  $u$  è assolutamente integrabile la sua trasformata è continua, limitata e infinitesima all'infinito:

**Teorema 1.5 (Riemann-Lebesgue)** *Se  $u \in L^1(\mathbb{R})$  allora*

$$U \text{ è limitata, continua ed infinitesima per } |f| \uparrow +\infty. \quad (1.17)$$

*In particolare*

$$\max_{f \in \mathbb{R}} |U(f)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (1.18)$$

Il risultato più importante, che abbiamo parzialmente anticipato nel lemma 1.3, permette di ricostruire il segnale  $u$  a partire dalla sua trasformata di Fourier mediante l'applicazione della trasformata coniugata: si parla di *Teorema di Inversione della trasformata di Fourier*.

**Teorema 1.6 (Inversione)** *Se  $u \in L^2(\mathbb{R})$  è un segnale regolare a tratti allora*

$$\frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{2\pi i f t} df = \lim_{F \uparrow +\infty} \int_{-F}^{+F} U(f) e^{2\pi i f t} df. \quad (1.19)$$

*Se poi  $u$  è continuo e  $u'$  ha energia finita allora*

$$U \in L^1(\mathbb{R}), \quad u(t) = \overline{\mathcal{F}[U]}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{2\pi i f t} df. \quad (1.20)$$

**Corollario 1.7 (Iniettività della trasformata di Fourier)** *Se due segnali hanno la medesima trasformata di Fourier allora coincidono.*

Questi risultati meritano qualche commento:

*Commento.*

Con linguaggio un po' immaginifico, potremmo dire che la formula (1.20) è una formula di *sintesi*: cioè permette di esprimere un segnale come "sovrapposizione" di un continuo di armoniche elementari. Corrispondentemente, la definizione stessa di Trasformata di Fourier è uno strumento di *analisi*, poiché permette di determinare l'ampiezza (complessa) di ciascuna armonica in cui il segnale stesso è decomposto.

Il teorema di Iniettività mostra che vi è un'unica sintesi possibile. Se pensiamo che le armoniche in gioco hanno la potenza del continuo, questo risultato è tutt'altro che intuitivo....

*Commento.*

Da un punto di vista più matematico, invece, il Teorema di inversione dice sostanzialmente che la *trasformata inversa coincide con la trasformata coniugata*, cioè

$$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}, \quad \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}[u] = u. \quad (1.21)$$

In altre parole la notizia (sorprendente) è che la sintesi di un segnale a partire dalla sua analisi in frequenza (cioè dalla sua trasformata), che a priori potrebbe coinvolgere un procedimento molto differente dalla analisi stessa, avviene invece con un'operazione che è una piccolissima variante dell'analisi, appunto la trasformata coniugata.

*Nota*

Tenendo conto del commento precedente, il Teorema di Riemann-Lebesgue fornisce un risultato "negativo" che giustifica ancor di più l'importanza di usare il valor principale. Più precisamente, esso mostra che se un segnale  $u$  non è continuo, la sua trasformata  $U$  non può essere assolutamente integrabile (in caso contrario, essendo  $u$  la trasformata coniugata di  $U$ ,  $u$  sarebbe continuo...). Di conseguenza, quando  $u$  non è continuo, nella formula di inversione (1.19) l'uso del valor principale è necessario per dare senso all'integrale e quindi alla formula stessa.

In altre parole: senza valor principale per i segnali discontinui non vi sarebbe la formula di inversione (e quindi la trasformata di Fourier perderebbe molto del suo interesse).

**Teorema 1.8 (Formula di Plancherel)** *Se  $u \in L^2(\mathbb{R})$  è un segnale di energia finita, allora anche  $U \in L^2(\mathbb{R})$  lo è e*

$$\mathcal{E}[u] = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |U(f)|^2 df = \mathcal{E}[U]. \quad (1.22)$$

## Proprietà elementari

### Trasformata, trasformata coniugata e dualità

$$\check{U}(f) = U(-f), \quad \overline{\mathcal{F}[u]} = \mathcal{F}[\bar{u}].$$

Quest'ultima proprietà giustifica il nome di trasformata coniugata. Tenendo conto del Teorema di Inversione, questo risultato si può anche enunciare espressivamente così:

$$\text{se } u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f) \text{ allora } U(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} u(-f). \quad (1.23)$$

Dal punto di vista pratico: ogni riga di una tabella di trasformate può essere utilizzata per il relativo calcolo anche da “destra” verso “sinistra”, semplicemente sostituendo  $t$  al posto di  $f$  nella colonna di destra e  $-f$  al posto di  $t$  nella colonna di sinistra.

### Segnali reali

$$\text{Se } u \text{ è reale allora } U \text{ è Hermitiano, cioè } U(-f) = \overline{U(f)}. \quad (1.24)$$

### Significato di $U(0)$

$$U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \quad \text{è semplicemente l'integrale di } u. \quad (1.25)$$

**Cambiamenti di scala** Se  $\lambda \neq 0$  è un fattore di cambiamento di scala e  $v(t) := u(t/\lambda)$ , allora

$$V(f) = |\lambda|U(\lambda f).$$

Più direttamente

$$\text{se } u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f) \text{ allora } u(t/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{F}} |\lambda|U(\lambda f) \quad (1.26)$$

### Parità e disparità

Se  $u$  è pari (cioè  $u(-t) = u(t)$ ) allora  $U$  è pari  $U(-f) = U(f)$ ;

Se  $u$  è dispari (cioè  $u(-t) = -u(t)$ ) allora  $U$  è dispari  $U(-f) = -U(f)$ .

In particolare

Se  $u$  è reale pari allora  $U$  è reale pari

Se  $u$  è reale dispari allora  $U$  è puramente immaginaria e dispari.

**Ritardi** Dato un segnale  $u$  e un ritardo  $\tau$ , indichiamo con  $R_\tau[u]$  il corrispondente segnale ritardato di  $\tau$

$$R_\tau[u](t) := u(t - \tau).$$

La trasformata di Fourier di  $v := R_\tau[u]$  risulta modulata per un esponenziale complesso di frequenza pari a  $\tau$

$$V(f) = e^{-2\pi i \tau f} U(f). \quad (1.27)$$

Più direttamente

$$\text{se } u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f) \text{ allora } u(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi i \tau f} U(f). \quad (1.28)$$

**Modulazione** Modulare un segnale  $u$  significa moltiplicarlo per un segnale esponenziale del tipo  $e^{2\pi i \alpha t}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto quindi

$$v(t) := e^{2\pi i \alpha t} u(t) \quad \text{si ha} \quad \hat{v}(f) = U(f - \alpha) = \mathcal{R}_\alpha[U](f).$$

o, direttamente,

$$\text{se } u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f) \quad \text{allora} \quad e^{2\pi i \alpha t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(f - \alpha). \quad (1.29)$$

Da questa formula si deduce facilmente che

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \alpha t) u(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [U(f - \alpha) + U(f + \alpha)], \\ \sin(2\pi \alpha t) u(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2i} [U(f - \alpha) - U(f + \alpha)]. \end{aligned}$$

**Derivazione** Se  $u \in L^2(\mathbb{R})$  è regolare a tratti e  $u' \in L^2(\mathbb{R})$ , allora

$$\boxed{\mathcal{F}[u'](f) = 2\pi i f \mathcal{F}[u] \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dt} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i f U(f)} \quad (1.30)$$

Se  $u$  e il segnale  $tu(t)$  appartengono a  $L^2(\mathbb{R})$ , allora  $\mathcal{F}[u]$  è derivabile (di classe  $C^1(\mathbb{R})$  se  $u'$  è assolutamente integrabile) e

$$\boxed{\frac{d}{df} U(f) = \mathcal{F}[-2\pi i t u](f) \quad \text{cioè} \quad -2\pi i t u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{df} U(f).} \quad (1.31)$$

### Qualche osservazione conclusiva...

**Frequenza e pulsazione** In molti testi, soprattutto matematici, si trova la definizione di trasformata di Fourier in termini di *pulsazione*  $\omega$  anziché di frequenza:

$$\hat{u}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.32)$$

Ciò semplifica la scrittura di alcune formule poiché apparentemente scompare il fattore  $2\pi$ .

D'altra parte con questa definizione l'antitrasformata non coincide più con la trasformata coniugata, ma fa comparire  $2\pi$  a quoziente davanti all'integrale (il principio di conservazione delle difficoltà, anche quelle puramente notazionali...): infatti la formula di inversione diventa

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.33)$$

Anche il Teorema di Plancherel risulta leggermente modificato:

$$\mathcal{E}[u] = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{E}[\hat{u}]. \quad (1.34)$$

In ogni caso è semplice passare da una all'altra definizione di trasformata, tenendo conto che  $\omega = 2\pi f$ ; si ha quindi

$$U(f) = \hat{u}(2\pi f), \quad \hat{u}(\omega) = U(\omega/2\pi). \quad (1.35)$$

Naturalmente tutte le formule relative alle proprietà elementari cambiano di conseguenza; per evitare di confondersi, è opportuno scegliere uno o l'altro tipo di definizione e memorizzare le relative formule in uno solo dei due sistemi, eventualmente convertendo solo alla fine il risultato nella forma richiesta.

**Trasformate hermitiane** Si è visto in (1.24) che quando il segnale  $u$  è reale la sua trasformata  $U$  è Hermitiana, cioè  $U(-f) = \overline{U(f)}$ ; questa proprietà permette un'interpretazione interessante del numero complesso  $U(f)$ . Partendo dalla formula di inversione, si ha

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(f)e^{2\pi i t f} df = \int_{-\infty}^0 U(f)e^{2\pi i t f} df + \int_0^{+\infty} U(f)e^{2\pi i t f} df \\ &= \int_0^{+\infty} U(-f)e^{-2\pi i t f} df + \int_0^{+\infty} U(f)e^{2\pi i t f} df \\ &= \int_0^{+\infty} \overline{U(f)e^{2\pi i t f}} + U(f)e^{2\pi i t f} df = 2 \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(U(f)e^{2\pi i t f}) df. \end{aligned}$$

Se ora poniamo  $U(f)$  in forma trigonometrico/esponenziale

$$2U(f) = R(f)e^{i\theta(f)}, \quad R(f) \in [0, +\infty), \quad \theta(f) \in ]-\pi, \pi]$$

si ottiene la sintesi di  $u$  in armoniche di cui è evidente l'ampiezza  $R(f)$  e la fase  $\theta(f)$

$$u(t) = 2 \int_0^{+\infty} R(f) \cos(2\pi t f + \theta(f)) df.$$

Il numero complesso  $U(f)$  porta quindi con sé entrambe le informazioni.

Analogamente, sempre nel caso dei segnali reali, è facile verificare che se la trasformata di Fourier di  $u$  si decompone in parte reale e parte immaginaria  $A(f) + iB(f)$  si ha

$$\frac{u(t) + u(-t)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} A(f), \quad \frac{u(t) - u(-t)}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} iB(f) \quad (1.36)$$

**Regolarità e annullamento all'infinito** iterando le formule (1.30) e (1.31) si ottiene facilmente

$$\frac{d^k}{dt^k} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi i f)^k U(f) \quad (1.37)$$

$$(-2\pi i t)^k u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^k}{df^k} U(f) \quad (1.38)$$

In particolare, da (1.37) segue che

se  $u$  ha  $k$  derivate assolutamente integrabili allora  $U(f) = o(1/|f|^k)$  per  $|f| \rightarrow \infty$ , cioè  $U(f)$  si annulla più velocemente di  $1/|f|^k$  "per frequenze grandi".

Analogamente, da (1.38) si ottiene che

se  $u = O(1/|t|^{k+1})$  per  $|t| \rightarrow \infty$  allora  $U(f)$  è derivabile fino all'ordine  $k$ .

Dunque, si può dire un po' grossolanamente che

la trasformata di Fourier scambia regolarità con velocità di annullamento all'infinito.

Il caso estremo è descritto con precisione dal Teorema di Paley-Wiener:

**Teorema 1.9 (Paley-Wiener)** *Se un segnale  $u$  ha durata limitata la sua trasformata di Fourier  $U(f)$  è analitica intera. Anche il viceversa è vero, pur di conoscere una stima sulla crescita del modulo di  $U$  nelle direzioni delle frequenze immaginarie.*