

Esercizi sulla trasformata di Laplace

Esercizio 1 Calcolare la trasformata di Laplace dei segnali casuali definiti da

$$u(t) = \text{rect}(t-2), \quad v(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ -2 & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad w(t) = H(t)t \text{rect}(t-1/2),$$

$$z(t) = H(t)(1-|t-1|)^+, \quad x(t) = H(t)\frac{e^t-1}{t}, \quad y(t) = H(t)e^{t-1} + H(t-1)e^t + H(t-2)\cos t$$

Esercizio 2 Calcolare la trasformata di Laplace del segnale causale e continuo u che è lineare in ogni intervallo $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ tale che

$$u(0+) = 1, \quad u(1) = 0, \quad u(2) = 1, \quad u(3) = 0, \quad u(t) \equiv 0 \text{ per } t > 3.$$

Medesimo calcolo per v caratterizzato da

$$v(0+) = 0, \quad v(1) = 1, \quad v(2) = 3, \quad v(t) \equiv 3 \text{ per } t > 2.$$

Esercizio 3 Calcolare la trasformata di Laplace dei seguenti segnali, precisando l'ascissa di convergenza:

$$u(t) := \begin{cases} \sin(t - \pi/4) & \text{se } t \geq \pi/4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad v(t) := H(t) \sin(t - \pi/4),$$

$$w(t) := \begin{cases} \sin(4t - \pi) & \text{se } t \geq \pi/4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 4 Calcolare la trasformata di Laplace di

$$H(t)te^{\alpha t} \cos \omega t, \quad H(t)te^{\alpha t} \sin \omega t, \quad H(t)e^{\alpha t} \sin \omega t \cos(\omega t), \quad H(t)e^{\alpha t} \sin^2 \omega t$$

Esercizio 5 Sia u la funzione 2-periodica che vale -1 in $(-1,0)$ e 1 in $(0,1)$, sia v la funzione 2 periodica che vale $(1-|t|)^+$ in $(-1,1)$ e sia w la funzione 2 periodica che vale 1 in $(-1,0)$ e 0 in $(0,1)$. Calcolare (a piacere...) le trasformate di Laplace di

$$\begin{aligned} &H(t)u(t), \quad H(t)u(t-1), \quad H(t-1)u(t), \quad H(t-1)u(t-1), \quad H(t)u(2t), \quad H(t)u(2t-1) \\ &H(t)v(t), \quad H(t)v(t-1), \quad H(t-1)v(t), \quad H(t-1)v(t-1), \quad H(t)v(2t), \quad H(t)v(2t-1) \\ &H(t)w(t), \quad H(t)w(t-1), \quad H(t-1)w(t), \quad H(t-1)w(t-1), \quad H(t)w(2t), \quad H(t)w(2t-1) \end{aligned}$$

Esercizio 6 Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ calcolare il prodotto di convoluzione

$$u_{\alpha, \beta} := H(t)e^{\alpha t} * H(t)e^{\beta t}$$

e la sua trasformata di Laplace. Applicare il risultato ottenuto per determinare

$$v := H(t) \sin t * H(t) \cos t.$$

Calcolare poi la trasformata di Laplace di

$$H(t-1) * v, \quad \text{rect}(t-1/2) * v, \quad \text{rect}(t-1/2) * \text{rect}(t-1) * \text{rect}(t-3/2).$$

Calcolare quest'ultimo prodotto di convoluzione.