

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Ugo Gianazza)

Esercizi in preparazione alla I prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda ¹

Pavia, 9 Novembre 2007

1 Integrali di funzioni trigonometriche

Esercizio 1.1. Calcolare il seguente integrale al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + 2 \cos t} dt.$$

Soluzione 1.1. Poniamo $z = e^{it}$. Grazie alle formule di Eulero, si ha che $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\int_{\gamma} \frac{z^n}{5 + (z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^2 + 5z + 1} dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. La funzione integranda $f(z) = z^n/(z^2 + 5z + 1)$ è singolare per $z^2 + 5z + 1 = 0$ ovvero nei punti $z_1 = (-5 + \sqrt{21})/2$ e $z_2 = (-5 - \sqrt{21})/2$, si tratta di poli semplici. Stabiliamo quali singolarità sono contenute all'interno di γ . Si ha $|z_2| = (5 + \sqrt{21})/2 > 5/2 > 1$, quindi z_2 non è interno a γ . D'altra parte, si ha $|z_1| = (5 - \sqrt{21})/2$. Si ha $5 - \sqrt{21} < 2$, ovvero $|z_1| < 1$, perché $21 > 9$, quindi z_1 è interno a γ . E' possibile pertanto applicare la formula dei residui:

$$\frac{1}{i} \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi \text{Res}(f; z_1).$$

Il calcolo del residuo è immediato:

$$\text{Res}(f; z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{z_1^n}{\sqrt{21}}$$

L'integrale richiesto vale quindi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + 2 \cos t} dt = \pi \frac{(-5 + \sqrt{21})^n}{2^{n-1} \sqrt{21}}.$$

Esercizio 1.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} e^{5it} \sin(6t) dt.$$

Soluzione 1.2. Grazie alle formule di Eulero, si ha che $e^{5it} = \cos(5t) + i \sin(5t)$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\int_0^{2\pi} e^{5it} \sin(6t) dt = \int_0^{2\pi} \cos(5t) \sin(6t) dt + i \int_0^{2\pi} \sin(5t) \sin(6t) dt.$$

Ricordando a questo punto che per $m, n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x) - \sin((m-n)x) dx = 0, \end{aligned}$$

¹Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22, email: antonio.marigonda@unipv.it

si conclude che l'integrale richiesto è nullo.

Esercizio 1.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} e^{3(\cos x + i \sin x)} \cos(x) dt.$$

Soluzione 1.3. Posto $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, grazie alle formule di Eulero, si ha che $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} e^{3z} \left(z + \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} e^{3z} (1 + 1/z^2) dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} e^{3z} dz + \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{3z}}{z^2} dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. Poiché e^{3z} è olomorfa su tutto \mathbb{C} , si ha che il suo integrale calcolato lungo γ è nullo. La funzione e^{3z}/z^2 presenta in z_0 un polo doppio. Si ha pertanto

$$\text{Res}(e^{3z}/z^2; 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \cdot \frac{e^{3z}}{z^2} \right) = 3,$$

e l'integrale richiesto vale

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{3z}}{z^2} dz = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \text{Res}(e^{3z}/z^2; 0) = 3\pi.$$

Esercizio 1.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2 + \sin t} dt.$$

Soluzione 1.4. Si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2 + \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t + 2 - 2}{2 + \sin t} dt = 2\pi - 2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Posto $z = e^{it}$, grazie alle formule di Eulero si ha $\sin t = \frac{1}{2i}(z - 1/z)$, pertanto

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = 2 \int_{\gamma} \frac{1}{2 + \frac{z-1/z}{2i}} \frac{dz}{iz} = 2 \int_{\gamma} \frac{2i}{4i + z - 1/z} \frac{dz}{iz} = 4 \int_{\gamma} \frac{1}{4iz + z^2 - 1} dz = 4 \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. La funzione $f(z) = 1/(z^2 + 4iz - 1)$ è singolare nei punti $z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$ e $z_2 = i(-2 - \sqrt{3})$, che sono poli semplici. Si ha $|z_2| > 2 > 1$, quindi z_2 non è contenuto all'interno di γ . Invece $|z_1| = 2 - \sqrt{3} < 1$ perché $3 > 1$, quindi z_1 è all'interno della regione di piano complesso delimitata da γ . Il residuo di f in z_1 è quindi:

$$\text{Res}(f; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2i\sqrt{3}}.$$

Si ha allora:

$$4 \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} dz = 4 \cdot 2\pi i \text{Res}(f; z_1) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi,$$

pertanto l'integrale richiesto vale $2\pi(1 - 2\sqrt{3}/3)$.

2 Integrali di funzioni razionali fratte

Esercizio 2.1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2 - 6x + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Soluzione 2.1. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{3z^2 - 6z + 1}{z^4 + 1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $z^4 = -1$, ovvero nei punti $z_k = e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$ per $k = 0, 1, 2, 3$. Si tratta di poli semplici, essendo le quattro radici di $z^4 + 1 = 0$. Si ha che:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \sqrt{2}/2$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a v . Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_0 e z_1 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-2})$ perché il grado del denominatore è di due unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \rightarrow +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.

Pertanto è possibile calcolare l'integrale tramite la formula dei residui:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i (\text{Res}(f; z_0) + \text{Res}(f; z_1)).$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente (si ricordi che $z_i^4 + 1 = 0$ per $i = 0, \dots, 3$):

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; z_i) &= \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} (3z^2 - 6z + 1) \frac{z - z_i}{z^4 + 1} = (3z_i^2 - 6z_i + 1) \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{z - z_i}{(z^4 + 1) - (z_i^4 + 1)} \\ &= \frac{3z_i^2 - 6z_i + 1}{4z_i^3} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $3z_i^2 - 6z_i + 1 \neq 0$. Nel caso $i = 0, 1$, osservando che $z_0^2 = i$, $z_1^2 = -i$, $z_0 + z_1 = i\sqrt{2}$, $z_0 - z_1 = \sqrt{2}$ e $z_0 z_1 = -1$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= 2\pi i \left(\frac{3z_0^2 - 6z_0 + 1}{4z_0^3} + \frac{3z_1^2 - 6z_1 + 1}{4z_1^3} \right) = 2\pi i \left(\frac{3i - 6z_0 + 1}{4iz_0} + \frac{-3i - 6z_1 + 1}{-4iz_1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3i - 6z_0 + 1}{z_0} + \frac{-3i - 6z_1 + 1}{-z_1} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-3iz_1 + 6z_0z_1 - z_1 - 3iz_0 - 6z_1z_0 + z_0}{-z_0z_1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (-3iz_1 - z_1 - 3iz_0 + z_0) = \frac{\pi}{2} (-3i(z_0 + z_1) + z_0 - z_1) = \frac{\pi}{2} (3\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 2.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x + 5}{(x^2 + 10x + 26)(x + 5 - 6i)^2} dx.$$

Soluzione 2.2. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{z + 5}{(z^2 + 10z + 26)(z + 5 - 6i)^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2 + 10z + 26)(z + 5 - 6i)^2 = 0$, ovvero nei punti $z_1 = -5 + i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = -5 + 6i$. Si ha che z_1 e z_2 sono poli semplici, mentre z_3 è un polo di ordine 2. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\text{Im}(z) \leq 0$, di raggio $R > |z_1| = \sqrt{29}$, percorsa in senso orario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a v . Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 cade all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-3})$ perché il grado del denominatore è di tre unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \rightarrow +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R

tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.

Pertanto è possibile calcolare l'integrale tramite la formula dei residui:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = -2\pi i \operatorname{Res}(f; z_2).$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\operatorname{Res}(f; z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \frac{z_2 + 5}{(z_2 - z_1)(z_2 + 5 - 6i)^2} = \frac{-i}{-2i(-7i)^2} = -1/98.$$

L'integrale richiesto vale pertanto:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{i\pi}{49}.$$

Esercizio 2.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x + 3}{(x + 3i)(x^2 + 6x + 18)} dx.$$

Soluzione 2.3. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{z + 3}{(z + 3i)(z^2 + 6z + 18)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z + 3i)(z^2 + 6z + 18) = 0$, ovvero $z_1 = -3i$, $z_2 = -3 + 3i$, $z_3 = -3 - 3i$. Si tratta di poli semplici. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > |z_2| = \sqrt{18}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a v . Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 cade all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-2})$ perché il grado del denominatore è di due unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \rightarrow +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.

Calcoliamo i residui di f in z_2 . Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\operatorname{Res}(f; z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \frac{z_2 + 3}{(z_2 + 3i)(z_2 - z_3)} = \frac{3i}{(-3 + 3i + 3i)2 \cdot 3i} = \frac{1}{6(2i - 1)} = -\frac{1 + 2i}{30}.$$

L'integrale richiesto vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x + 3}{(x + 3i)(x^2 + 6x + 18)} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{\pi}{15}(2 - i)$$

Esercizio 2.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{6}{(x + 2i)(x^2 + 9)(x - 4i)} dx.$$

Soluzione 2.4. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{6}{(z + 2i)(z^2 + 9)(z - 4i)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z + 2i)(z^2 + 9)(z - 4i) = 0$, ovvero $z_1 = -2i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 4i$. Si tratta di poli semplici. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \max\{|z_2|, |z_4|\} = \sqrt{4}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a v . Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 e z_4 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-4})$ perché il grado del denominatore è di quattro unità superiore a quello del

numeratore, pertanto al tendere di $R \rightarrow +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.

Pertanto è possibile applicare la formula dei residui.

Calcoliamo i residui di f in z_2 e z_4 . Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \frac{6}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{6}{(3i + 2i)(3i + 3i)(3i - 4i)} = \frac{6}{5i \cdot 6i \cdot (-i)} = \frac{1}{5i} \\ \operatorname{Res}(f; z_4) &= \lim_{z \rightarrow z_4} (z - z_4)f(z) = \frac{6}{(z_4 - z_1)(z_4^2 + 9)} = \frac{6}{(4i + 2i)(-16 + 9)} = \frac{6}{6i \cdot (-7)} = -\frac{1}{7i}.\end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{6}{(x + 2i)(x^2 + 9)(x - 4i)} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(f; z_2) + \operatorname{Res}(f; z_4)) = 4\pi/35.$$

Esercizio 2.5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx.$$

Soluzione 2.5. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{3z^2}{z^6 + 1}$, $z \in \mathbb{C}$. Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $z^6 + 1 = 0$, ovvero $z_i = e^{i\pi/6 + ik\pi/3}$, $i = 0, \dots, 5$. Si tratta di poli semplici (inoltre le radici sono due a due complesse coniugate). Si ha:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, z_2 = i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, z_5 = -i, z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \max |z_2|, |z_4| = \sqrt{4}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a v . Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_1, z_2 e z_3 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-4})$ perché il grado del denominatore è di quattro unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \rightarrow +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.

Pertanto è possibile applicare la formula dei residui.

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente (si ricordi che $z_i^6 + 1 = 0$ per $i = 0, \dots, 5$):

$$\operatorname{Res}(f; z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} (3z^2) \frac{z - z_i}{z^6 + 1} = (3z_i^2) \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{z - z_i}{(z^6 + 1) - (z_i^6 + 1)} = \frac{3z_i^2}{6z_i^5} = \frac{1}{2} \frac{1}{z_i^3}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $3z_i^2 \neq 0$ per $i = 0, \dots, 5$. Osservando che $z_0^3 = i$, $z_1^3 = -i$, $z_2^3 = i$, si ha che l'integrale richiesto vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(f; z_0) + \operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} \right) = \pi.$$

3 Applicazioni del Lemma di Jordan

Esercizio 3.1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(4x)}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx.$$

Soluzione 3.1. Consideriamo le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{4iz}}{(z^2 - 2z + 10)(z - 5i)} = e^{4iz} f(z), \quad g^-(z) = \frac{e^{-4iz}}{(z^2 - 2z + 10)(z - 5i)} = e^{-4iz} f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2 - 2z + 10)(z - 5i) = 0$, ovvero $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = 5i$. Si tratta di poli semplici. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$ cadono solo le singolarità z_1 e z_3 . Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \leq 0$ cade solo la singolarità z_2 . Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f , è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(4x)}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{2i(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix}}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx - \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-4ix}}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx \\ &= \pi(\text{Res}(g^+; z_1) + \text{Res}(g^+; z_3) + \text{Res}(g^-; z_2)) \end{aligned}$$

Calcoliamo i residui di g^+ e g^- . Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g^+(z) = \frac{e^{4iz_1}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{e^{4iz_1}}{6i(1 - 2i)} = \frac{1}{6} \frac{e^{4i-12}}{2 + i} = \frac{e^{-12}}{30} e^{4i}(2 - i). \\ \text{Res}(g^+; z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3)g^+(z) = \frac{e^{4iz_3}}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} = \frac{e^{-20}}{z_3^2 - 2z_3 + 10} = -\frac{e^{-20}}{5(3 + 2i)} = -\frac{e^{-20}}{65}(3 - 2i). \\ \text{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)g^-(z) = \frac{e^{-4iz_2}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} = \frac{e^{-4iz_2}}{-6i(1 - 8i)} = -\frac{1}{6} \frac{e^{-4i-12}}{8 + i} = -\frac{e^{-12}}{390} e^{-4i}(8 - i). \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(4x)}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)} dx = \frac{e^{-12}\pi}{390} (e^{4i}(26 - 13i) - e^{-8}(18 - 12i) - e^{-4i}(8 - i)).$$

Esercizio 3.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{(x^2 + 9)(x - 6i)} dx.$$

Soluzione 3.2. Consideriamo la funzione:

$$g(z) = e^{3iz} f(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2 + 9)(z - 6i)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si ha che il coefficiente α per cui $g(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo. La funzione $f(z)$ è singolare nei punti corrispondenti a $(z^2 + 9)(z - 6i) = 0$ ovvero $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 6i$. Di queste singolarità, solo z_1 e z_3 cadono nel semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$. Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f , è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{(x^2 + 9)(x - 6i)} dx = 2\pi i(\text{Res}(g; z_1) + \text{Res}(g; z_3))$$

Calcoliamo i residui di g in z_1 e in z_3 . Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{Res}(g; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g(z) = \frac{e^{3iz_1}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{e^{-9}}{18}. \\ \text{Res}(g; z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3)g(z) = \frac{e^{3iz_3}}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} = \frac{e^{3iz_3}}{z_3^2 + 9} = -\frac{e^{-18}}{27}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{2\pi i e^{-9}}{9} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-9}}{3} \right).$$

Esercizio 3.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 4x}{x^2 + 6x + 14} dx.$$

Soluzione 3.3. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\sin 4x = (e^{4ix} - e^{-4ix})/(2i)$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{4iz}}{z^2 + 6z + 14} = e^{4iz} f(z), \quad g^-(z) = \frac{e^{-4iz}}{z^2 + 6z + 14} = e^{-4iz} f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $z^2 + 6z + 14 = 0$, ovvero $z_1 = -3 + i\sqrt{5}$, $z_2 = -3 - i\sqrt{5}$. Si tratta di poli semplici. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$ cadono solo la singolarità z_1 . Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \leq 0$ cade solo la singolarità z_2 . Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f , è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 4x}{(x^2 + 6x + 14)} dx &= \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{(x^2 + 6x + 14)} dx \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix}}{(x^2 + 6x + 14)} dx - \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-4ix}}{(x^2 + 6x + 14)} dx \\ &= \pi(\text{Res}(g^+; z_1) + \text{Res}(g^-; z_2)) \end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) g^+(z) = \frac{e^{4iz_1}}{(z_1 - z_2)} = \frac{e^{4iz_1}}{2i\sqrt{5}}. \\ \text{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) g^-(z) = \frac{e^{-4iz_2}}{(z_2 - z_1)} = -\frac{e^{-4iz_2}}{2i\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{\sqrt{5}} \frac{e^{-12i-4\sqrt{5}} - e^{12i-4\sqrt{5}}}{2i} = \frac{\sqrt{5}\pi e^{-4\sqrt{5}}}{5} \frac{e^{-i12} - e^{i12}}{2i} = -\frac{\sqrt{5}\pi e^{-4\sqrt{5}} \sin 12}{5}$$

Esercizio 3.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x^2 - 6x + 25} dx.$$

Soluzione 3.4. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\cos 2x = (e^{2ix} + e^{-2ix})/2$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2 - 6z + 25} = e^{2iz} f(z), \quad g^-(z) = \frac{e^{-2iz}}{z^2 - 6z + 25} = e^{-2iz} f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $z^2 - 6z + 25 = 0$, ovvero $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \geq 0$ cade solo la singolarità z_1 . Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\text{Im}(z) \leq 0$ cade solo la singolarità z_2 . Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f , è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{(x^2 - 6x + 25)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{x^2 - 6x + 25} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x^2 - 6x + 25} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2ix}}{x^2 - 6x + 25} dx \\ &= i\pi(\text{Res}(g^+; z_1) - \text{Res}(g^-; z_2)) \end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g^+(z) = \frac{e^{2iz_1}}{(z_1 - z_2)} = \frac{e^{2iz_1}}{8i}. \\ \operatorname{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)g^-(z) = \frac{e^{-2iz_2}}{(z_2 - z_1)} = -\frac{e^{-2iz_2}}{8i}.\end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale pertanto:

$$\frac{\pi}{4} \frac{e^{6i-8} + e^{-6i-8}}{2} = \frac{\pi e^{-8} \cos 6}{4}$$

Esercizio 3.5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 3x}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)} dx.$$

Soluzione 3.5. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\cos 3x = (e^{3ix} + e^{-3ix})/2$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9)} = e^{3iz} f(z), \quad g^-(z) = \frac{e^{-3iz}}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9)} = e^{-3iz} f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9)$, ovvero $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ cadono solo le singolarità z_1 e z_3 . Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ cadono solo la singolarità z_2 e z_4 . Poiché il grado del denominatore di f è di quattro unità superiore al grado del numeratore di f , è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 3x}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-3ix}}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)} dx \\ &= \pi i (\operatorname{Res}(g^+; z_1) + \operatorname{Res}(g^+; z_3) - \operatorname{Res}(g^-; z_2) - \operatorname{Res}(g^-; z_4))\end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g^+(z) = \frac{e^{3iz_1}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{e^{3iz_1}}{2i(z_1^2 + 9)}. \\ \operatorname{Res}(g^+; z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3)g^+(z) = \frac{e^{3iz_3}}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{e^{3iz_3}}{(z_3^2 - 2z_3 + 2)6i}. \\ \operatorname{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)g^-(z) = \frac{e^{-3iz_2}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} = -\frac{e^{-3iz_2}}{2i(z_2^2 + 9)}. \\ \operatorname{Res}(g^-; z_4) &= \lim_{z \rightarrow z_4} (z - z_4)g^-(z) = \frac{e^{-3iz_4}}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} = -\frac{e^{-3iz_4}}{(z_4^2 - 2z_4 + 2)6i}.\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{6} \left(\frac{3e^{3iz_1}}{z_1^2 + 9} + \frac{e^{3iz_3}}{z_3^2 - 2z_3 + 2} + \frac{3e^{-3iz_2}}{z_2^2 + 9} + \frac{e^{-3iz_4}}{z_4^2 - 2z_4 + 2} \right)$$

Per semplificare quest'espressione, osserviamo che $z_1^2 = 2i$, $z_2^2 = -2i$, $z_3^2 = z_4^2 = -9$ quindi:

$$\begin{aligned}\frac{e^{3iz_1}}{z_1^2 + 9} + \frac{e^{-3iz_2}}{z_2^2 + 9} &= \frac{e^{3i-3} + e^{-3i-3}}{(9+2i)(9-2i)} = \frac{e^{-3} e^{3i} + e^{-3} e^{-3i}}{85} \\ &= e^{-3} \frac{9e^{3i} - 2ie^{3i} + 9e^{-3i} + 2ie^{-3i}}{85} = e^{-3} \frac{18 \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2} - 4i \frac{e^{3i} - e^{-3i}}{2}}{85} \\ &= \frac{2e^{-3}}{85} (9 \cos 3 + 2 \sin 3) \\ \frac{e^{3iz_3}}{z_3^2 - 2z_3 + 2} + \frac{e^{-3iz_4}}{z_4^2 - 2z_4 + 2} &= \frac{e^{3i-9} + e^{-3i-9}}{(-7+6i)(-7-6i)} = -\frac{14e^{-9}}{85}\end{aligned}$$

Allora l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{6} \left(3 \frac{2e^{-3}}{85} (9 \cos 3 + 2 \sin 3) - \frac{14e^{-9}}{85} \right) = \frac{\pi e^{-3}}{255} (27 \cos 3 + 6 \sin 3 - 7e^{-6}).$$

4 Sviluppi, residui ecc...

Esercizio 4.1. Si consideri la funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3 + 8} + e^{-1/z}.$$

Determinare le singolarità della f , classificarle e calcolare il relativo residuo (è *molto* utile osservare che la f è la somma di due funzioni). Scrivere quindi lo sviluppo di Laurent della f relativo a $z = 0$, precisandone l'insieme di convergenza.

Soluzione 4.1. La funzione f è olomorfa in tutti i punti eccettuati quelli per cui $z^3 + 8 = 0$, ovvero $z_k = 2e^{i\pi/3+2k\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$, e il punto $z_3 = 0$. Si osservi che per $k = 0, 1, 2$ si ha $z_k = -8/z_k^2$. I punti z_k , $k = 1, 2, 3$ sono poli semplici. Ricordando che $e^{-1/z}$ è olomorfa in un intorno di z_k e $\cos z_k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \cos z \frac{(z - z_k)}{z^3 + 8} + (z - z_k) e^{-1/z} = \cos z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)}{(z^3 + 8) + (z_k^3 + 8)} \\ &= \frac{\cos z_k}{3z_k^2} = \frac{8 \cos z_k}{3z_k} = \frac{2\bar{z}_k (e^{iz_k} + e^{-iz_k})}{3} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda z_3 si ha che si tratta di una singolarità essenziale, infatti $\cos z/(z^3 + 8)$ è olomorfa in un intorno di 0 e in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vale:

$$e^{-1/z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/z)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k},$$

pertanto $\text{Res}(f; z_3) = -1$. Ricordando che:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}, \\ \frac{1}{z^3 + 8} &= \frac{1}{8} \frac{1}{1 + \frac{z^3}{8}} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}} z^{3n}, \text{ se } |z| < 2, \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Laurent di f relativo a $z = 0$, che converge se $0 < |z| < 2$, è il seguente:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}} z^{3n} \right) + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+j=k} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!} \frac{(-1)^j}{2^{3(j+1)}} z^{3j} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{n+j=k} \frac{1}{n! 2^{3(j+1)}} z^{3j+2i} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k} \end{aligned}$$

Esercizio 4.2. Determinare e classificare le singolarità di

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z+1}.$$

Calcolare il residuo del polo e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 1$ precisando l'insieme di convergenza.

Soluzione 4.2. La funzione presenta singolarità in $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$. Si ha che z_2 è un polo semplice, in quanto la funzione $f(z)(z - z_2)$ è olomorfa in un intorno di z_2 . Pertanto il calcolo del residuo porge:

$$\text{Res}(f; z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} f(z)(z - z_2) = \lim_{z \rightarrow -1} \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Nel punto $z_1 = 1$ la funzione presenta una singolarità essenziale: si ha infatti, posto $w = (z - 1)^{-1}$,

$$\exp w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

da cui

$$(z-1)^m f(z) = \frac{1}{z+1} \left((z-1)^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{m-n}}{n!} \right),$$

che al limite per $z \rightarrow 1$ diverge per ogni $m \in \mathbb{N}$. La funzione è olomorfa in $B(1, 2) \setminus \{1\}$, ovvero nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ e pertanto in tale insieme la serie di Laurent relativa a $z = 1$ converge.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (z-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (z-1)^k \frac{w^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1} j!} (z-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.3. Calcolare il seguente integrale, dove $C_2(0)$ indica la circonferenza centrata in $z = 0$ di raggio $R = 2$ e orientata positivamente

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z} - 1}{3z(z+1)^2} dz.$$

Soluzione 4.3. La funzione integranda, che indicheremo con $f(z)$ presenta singolarità in $z_0 = 0$ e $z_1 = -1$. Si noti tuttavia che

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{3(z+1)^2} \frac{e^{2z} - 1}{2z} = \frac{2}{3},$$

pertanto 0 è una singolarità eliminabile, e il prolungamento di f in 0 definito da $f(0) = 2/3$, rende la funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. L'unica singolarità è pertanto il polo doppio $z_1 = -1$, che è interno al cerchio centrato in 0 di raggio 2. Calcoliamo il residuo di f in z_1 , trattandosi di un polo doppio si ha:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; z_1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (f(z)(z+1)^2) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{2z} - 1}{3z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{2e^{2z} \cdot 3z - 3(e^{2z} - 1)}{9z^2} \right) = \frac{-6e^{-2} - 3e^{-2} + 3}{9} = \frac{1 - 3e^{-2}}{3}. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale allora:

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z} - 1}{3z(z+1)^2} dz = 2\pi i \text{Res}(f; -1) = 2\pi i \frac{1 - 3e^{-2}}{3}.$$

Esercizio 4.4. Determinare e classificare le singolarità della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3 - 125i} + \frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3}.$$

Indicato con Γ il rettangolo di vertici $5, 5 + 5i, -5 + 5i, -5$ percorso in senso antiorario, calcolare

$$\int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Soluzione 4.4. La funzione è singolare nei punti $z^3 = 125i$, ovvero $z_k = 5e^{i\pi/6+2ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$ e $z_3 = 125i$. I punti $z_0 = 5e^{i\pi/6}$, $z_1 = 5e^{i\pi5/6}$ e $z_2 = -5i$ sono poli semplici per la funzione, mentre z_3 è un polo di ordine 3. All'interno del rettangolo Γ cadono solo z_0 e z_1 . Calcoliamo il residuo di f in questi punti:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2(z - z_0)}{(z^3 - 125i) - (z_0^3 - 125i)} + (z - z_0) \frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3} = \frac{z_0^2}{3z_0^2} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} f(z)(z - z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2(z - z_1)}{(z^3 - 125i) - (z_1^3 - 125i)} + (z - z_1) \frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3} = \frac{z_1^2}{3z_1^2} = \frac{1}{3}$$

L'integrale richiesto vale:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f; z_0) + \operatorname{Res}(f; z_1)) = \frac{\pi i}{3}.$$

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Ugo Gianazza)

Esercizi di Metodi

Dott. Antonio Marigonda ²

Pavia, 11 Dicembre 2007

5 Serie di Fourier

Esercizio 5.1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica definita da

$$f(t) := \begin{cases} 4, & t \in [0, \pi[\\ 2, & t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Scrivere lo sviluppo di Fourier in forma esponenziale.
2. Studiare la convergenza della serie alla f .
3. Determinare la somma della serie numerica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n$.

Soluzione 5.1. 1. Lo sviluppo in serie di Fourier di f in forma esponenziale è dato da $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, dove si ha per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi f(t) dt + \int_\pi^{2\pi} f(t) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi 4 dt + \int_\pi^{2\pi} 2 dt \right) = \frac{1}{2\pi} (4\pi + 2\pi) = 3. \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi f(t) e^{-int} dt + \int_\pi^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi 4e^{-int} dt + \int_\pi^{2\pi} 2e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(4 \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^\pi + 2 \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_\pi^{2\pi} \right) = -\frac{1}{i\pi n} (2(e^{-in\pi} - 1) + (e^{-2\pi in} - e^{-in\pi})) = \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n}, \end{aligned}$$

giacché $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$. Pertanto:

$$f = 3 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} e^{int}.$$

2. La serie

$$S(t) := 3 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} e^{int}.$$

converge alla funzione nel senso dell'energia perché:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^0 |f(t)|^2 dt + \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 16\pi + 4\pi = 20\pi < +\infty.$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale:

²Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

- (a) per ogni $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e derivabile in t , e quindi la serie di Fourier calcolata per $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ converge a $f(t)$;
- (b) per $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f presenta una discontinuità di prima specie t , e $f'(k\pi^+)$, $f'(k\pi^-)$ esistono entrambe finite. Siamo nel III caso del Teorema di convergenza puntuale, quindi:

$$S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) - f(k\pi^-)}{2} = 3.$$

3. La serie numerica richiesta si ottiene valutando $S(t)$ per $t = \pi$, e si ha $S(\pi) = 3$.

Esercizio 5.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica e pari definita da $f(t) = \frac{\pi}{2} - t$ per $t \in [0, \pi]$.

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f ;
2. Studiarne la convergenza;
3. Valutare la somma della serie in $t = 0$.

Soluzione 5.2. 1. La funzione è pari, quindi $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Si ha per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\sin nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$f = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos nt.$$

Osservando che $a_n = 0$ se $n = 2k$ è pari e $a_n = 4/(\pi n^2)$ se $n = 2k + 1$ è dispari, si ha:

$$f = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)^2 \cos((2k + 1)t).$$

2. Si ha che la serie converge alla funzione nel senso dell'energia, perché la funzione è periodica e limitata. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, posto:

$$S(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos nt,$$

si ha che:

- (a) per ogni $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e derivabile, quindi vi è convergenza puntuale $S(t) = f(t)$.
- (b) per ogni $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e presenta un punto angoloso, quindi anche in questo caso $S(t) = f(t)$.
3. In particolare, $S(0) = f(0) = \pi/2$, concludiamo perciò che $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2}$, da cui si può dedurre

$$\text{che } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 5.3. Si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica che nell'intervallo $(0, 2\pi]$ vale

$$u(t) := \begin{cases} 2, & t \in (0, \pi/2) \\ 0, & t \in [\pi/2, \pi) \\ 3, & t \in [\pi, 3\pi/2) \\ 0, & t \in [3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Dopo averne accuratamente disegnato il grafico, calcolare lo sviluppo di Fourier in forma trigonometrica. Studiare quindi la convergenza della serie alla funzione. Infine calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Soluzione 5.3. La funzione è limitata e periodica, pertanto sviluppabile in serie di Fourier. Si ha per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 2 dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3 dt \right) = \frac{5}{2}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 2 \cos(nt) dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3 \cos(nt) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(2 \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} + 3 \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{\pi}^{3\pi/2} \right) = \frac{1}{n\pi} (2 \sin(n\pi/2) + 3 \sin(3n\pi/2)) \\ &= \frac{1}{n\pi} (2 \sin(n\pi/2) + 3 \sin(-n\pi/2 + 2n\pi)) = \frac{1}{n\pi} (2 \sin(n\pi/2) + 3 \sin(-n\pi/2)) = -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 2 \sin(nt) dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3 \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(2 \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} + 3 \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{\pi}^{3\pi/2} \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} (2 - 2 \cos(n\pi/2) + 3 \cos(n\pi) - 3 \cos(3n\pi/2)) = \frac{2 + 3(-1)^n - 2 \cos(n\pi/2) - 3 \cos(2n\pi - n\pi/2)}{n\pi} \\ &= \frac{2 + 3(-1)^n - 5 \cos(n\pi/2)}{n\pi} \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$u = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos(nt) + \frac{2 + 3(-1)^n - 5 \cos(n\pi/2)}{n\pi} \sin(nt).$$

Poiché u è limitata e periodica si ha che la sua serie di Fourier converge a f in energia. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, poiché u è continua e derivabile con derivata continua in ogni punto ad eccezione di $t = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la sua serie di Fourier converge puntualmente a $u(t)$ per $t \neq k\pi/2$, e nei punti $t = k\pi/2$ converge alla media dei limiti destro e sinistro di u , ovvero converge a 1 per $t = 4k\pi$ e $t = \pi/2(4k+1)$, e converge a 3/2 per $t = (2k+1)\pi$ e $t = \pi/2(4k+3)$. La somma della serie richiesta si ottiene valutando la serie di Fourier per $t = 0$, si ha allora

$$1 = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Esercizio 5.4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, pari, definita da

$$f(t) := \begin{cases} \frac{6}{\pi} t + 3, & t \in [0, \pi/2] \\ \frac{12}{\pi}(\pi - t), & t \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Tracciare il grafico della f , scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione, verificare che converge alla funzione nel senso dell'energia. Applicare infine l'uguaglianza di Parseval per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Soluzione 5.4. Poiché f è pari, si avrà:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt),$$

dove:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} f(t) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{6}{\pi} t + 3 \right) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{12}{\pi} (\pi - t) \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{6}{\pi} \frac{t^2}{2} + 3t \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{12}{\pi} \left(\pi t - \frac{t^2}{2} \right) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} + \frac{12}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \right) \right) = \frac{15}{2}. \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} f(t) \cos(kt) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{6}{\pi} t + 3 \right) \cos(kt) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{12}{\pi} (\pi - t) \right) \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(\frac{6}{\pi} t + 3 \right) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{6}{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt + \left[\left(\frac{12}{\pi} (\pi - t) \right) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{12}{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{6}{k} \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) - \frac{6}{k\pi} \left[-\frac{\cos kt}{k} \right]_0^{\pi/2} - \frac{6}{k} \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{12}{k\pi} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{6}{k^2\pi} (\cos(k\pi/2) - 1) - \frac{12}{k^2\pi} ((-1)^k - \cos(k\pi/2)) \right) \\ &= \frac{12}{\pi^2 k^2} (3 \cos(k\pi/2) - 1 - 2(-1)^k) \end{aligned}$$

Allora si ha:

$$S(t) = \frac{15}{4} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cos(k\pi/2) - 1 - 2(-1)^k}{k^2} \cos(kt).$$

Posto:

$$S_N(t) = \frac{15}{4} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{3 \cos(k\pi/2) - 1 - 2(-1)^k}{k^2} \cos(kt),$$

dato che f è limitata e periodica, si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt &= 2 \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 \left(\int_0^{\pi/2} |f(t)|^2 dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right) \\
 &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{6}{\pi} t + 3 \right)^2 dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{12}{\pi} (\pi - t) \right)^2 dt \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{6} \int_0^3 (w + 3)^2 dw + \frac{144}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} (t - \pi)^2 dt \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{6} \left[\frac{(w + 3)^3}{3} \right]_0^3 + \frac{144}{\pi^2} \left[\frac{(t - \pi)^3}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{21\pi}{2} + 6\pi \right) = 33\pi
 \end{aligned}$$

pertanto la serie converge a f nel senso dell'energia, ovvero:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0.$$

Per l'uguaglianza di Parseval si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

Nel nostro caso si ha:

$$33 = \frac{225}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

Pertanto la somma della serie numerica vale $39/8$.

Esercizio 5.5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \frac{1}{3 + 2 \cos t}.$$

1. Scrivere lo sviluppo di Fourier di f in forma esponenziale.
2. Verificare il Teorema di convergenza puntuale in $t = 0$.

Soluzione 5.5. 1. La serie in forma esponenziale è:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

dove al variare di $k \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{3 + 2 \cos t} dt.$$

Poiché l'integrale del coniugato è il coniugato dell'integrale, si ha che $c_n = \overline{c_{-n}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto, dato $n \geq 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
 c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{3 + 2 \cos t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{3 + z + 1/z} \frac{dz}{iz} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 + 3z + 1} dz.
 \end{aligned}$$

La funzione integranda è singolare nei punti dove $z^2 + 3z + 1 = 0$, ovvero $z_1 = (-3 + \sqrt{5})/2$, $z_2 = (-3 - \sqrt{5})/2$. Verifichiamo la loro posizione rispetto alla circonferenza $C_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si ha $|z_1|^2 = (3 - \sqrt{5})^2/4$. Poiché $3 - \sqrt{5} < 1$ (infatti $\sqrt{5} > 2$), si ha che $(3 - \sqrt{5})^2 < 1$ e quindi $|z_1| < 1$, pertanto z_1 è interno a $C_1(0)$. Viceversa, $|z_2| = (3 + \sqrt{5})/2 > 3/2 > 1$, pertanto z_2 è esterna. Calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1 . Trattasi di un polo semplice:

$$\text{Res}\left(\frac{z^n}{z^2 + 3z + 1}, z_1\right) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{z^n}{z^2 + 3z + 1} = \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} = \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Pertanto si ha

$$c_n = \overline{c_{-n}} = c_{-n} = \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^n \sqrt{5}}, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dunque:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^n \sqrt{5}} e^{int} + \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^n \sqrt{5}} e^{-int} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^{n-1} \sqrt{5}} \cos(nt).$$

2. Si ha che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi la serie di Fourier di f converge ad f puntualmente per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare, se $t = 0$ si ha $f(0) = S(0)$ e quindi:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^{n-1} \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 3}{2} \right)^n \right) = \frac{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n}{\sqrt{5}}.$$

Si ha che la serie dell'espressione precedente è una ridotta della serie geometrica di ragione z_1 , pertanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_1^n = \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n - 1 = \frac{1}{1 - z_1} - 1 = \frac{z_1}{1 - z_1},$$

Si ha quindi

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n = 1 + \frac{2z_1}{1 - z_1} = \frac{1 + z_1}{1 - z_1} = \frac{2 + 2z_1}{2 - 2z_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sostituendo nell'espressione $S(0)$ il risultato ottenuto si trova proprio $f(0)$.

Esercizio 5.6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, pari, definita da $f(t) = 3(\pi + t)$ per $t \in [-\pi, 0]$. Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo. Utilizzando poi l'uguaglianza di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Soluzione 5.6. La funzione è periodica e limitata, pertanto ad energia finita e dunque sviluppabile in serie di Fourier. Si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 \int_{-\pi}^0 9(\pi + t)^2 dt = 18 \left[\frac{(\pi + t)^3}{3} \right]_{-\pi}^0 = 6\pi^3.$$

Essendo f pari si avrà

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt),$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 3(\pi + t) dt = \frac{6}{\pi} \left[\frac{(\pi + t)^2}{2} \right]_{-\pi}^0 = \frac{3}{\pi} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 3(\pi + t) \cos(kt) dt \\ &= \frac{6}{\pi} \left[(\pi + t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 - \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(kt)}{k} dt = -\frac{6}{k\pi} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 = \frac{6}{\pi k^2} (1 - (-1)^k) \end{aligned}$$

Quindi per $k \geq 1$ si ha che $a_k = 0$ se $k = 2n$ è pari e $a_k = -12/(\pi k^2)$ se $k = 2n - 1$ è dispari. Si ha quindi:

$$S(t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}.$$

Per l'uguaglianza di Parseval si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

ovvero:

$$3\pi^2 = \frac{9}{4}\pi^2 + \frac{72}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

La somma richiesta vale pertanto $\pi^4/96$.

6 Trasformate di Fourier

Esercizio 6.1. Ricordando che $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$, si calcoli la trasformata di Fourier delle funzioni:

$$f_1(t) = H(-t)te^{3t}, \quad f_2(t) = H(-t+2)te^{3t}, \quad f_3(t) = H(-t)te^{3t} \cos t.$$

Soluzione 6.1. Consideriamo la funzione $f(t) = H(-t)e^{3t}$, ovvero $f(t) = e^{3t}$ per $t < 0$ e 0 altrove.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{3t}e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(3-i\omega)t} dt = \frac{1}{3-i\omega}.$$

Poiché $f_1(t) = tf(t)$, si ha:

$$\widehat{f}_1(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{3-i\omega} \right) = i \left(-\frac{-i}{(3-i\omega)^2} \right) = -\frac{1}{(3-i\omega)^2}$$

Per quanto riguarda f_2 , si ha $f_2 = t(H(-t+2)e^{3(t-2)}e^6) = te^6 f(t-2)$, da cui:

$$\widehat{f}_2(\omega) = e^6 i \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{3-i\omega} e^{-2i\omega} \right] = e^{-2i\omega} \frac{5i + 2\omega}{(3i + \omega)^2}.$$

Per quanto riguarda f_3 , si ha $f_3 = t(H(-t)e^{3t}(e^{it} + e^{-it})/2)$, da cui $f_3(t) = (f_1(t)e^{it} + f_1(t)e^{-it})/2$, pertanto:

$$\widehat{f}_3(\omega) = \frac{1}{2} \left(\widehat{f}_1(\omega-1) + \widehat{f}_1(\omega+1) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(3-i(\omega-1))^2} + \frac{1}{(3-i(\omega+1))^2} \right).$$

Esercizio 6.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pari, definita da

$$f(t) := \begin{cases} t+4, & t \in [-4, -2] \\ 1-t/2, & t \in [-2, 0] \\ 1+t/2, & t \in (0, 2) \\ 4-t, & t \in [2, 4] \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Verificare che f è \mathcal{F} -trasformabile.
2. Elencare le principali proprietà che si possono ricavare su \widehat{f} dalla teoria, prima di calcolare \widehat{f} .
3. Calcolare esplicitamente \widehat{f} .

Soluzione 6.2. 1. f è limitata e nulla fuori dall'intervallo $[-4, 4]$, pertanto è immediato verificare che $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$, e questo garantisce che f è \mathcal{F} -trasformabile.

2. Alcune proprietà della trasformata sono le seguenti:

(a) poiché f è pari e reale, allora \widehat{f} è pari e reale.

(b) per il Lemma di Riemann-Lebesgue, si ha $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ e $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$.

(c) poiché f è nulla fuori da $[-4, 4]$, non solo f ma anche $tf \in L^1$, quindi anche tf è trasformabile e si ha $\widehat{tf} = i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}$. Pertanto $\frac{d}{d\omega} \widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$.

(d) il ragionamento precedente può essere iterato: per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $t^k f \in L^1$, da cui $\widehat{t^k f} = i^k \frac{d^k}{d\omega^k} \widehat{f}$ pertanto $\frac{d^k}{d\omega^k} \widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R})$. Quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$

3. Un calcolo diretto a partire dalla definizione risulta molto difficoltoso. Un procedimento alternativo è il seguente: si osserva che

$$f'(t) = \chi_{[-4, -2]}(t) - \frac{1}{2}\chi_{[-2, 0]}(t) + \frac{1}{2}\chi_{[0, 2]} - \chi_{[2, 4]}(t), \quad t \neq 0, \pm 2, \pm 4.$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\chi_{[-4, -2]}(t) = \chi_{[-1, 1]}(t+3), \quad \chi_{[-2, 0]}(t) = \chi_{[-1, 1]}(t+3), \quad \chi_{[0, 2]}(t) = \chi_{[-1, 1]}(t-1), \quad \chi_{[2, 4]}(t) = \chi_{[-1, 1]}(t-3).$$

Perciò si ottiene:

$$f'(t) = \chi_{[-1, 1]}(t+3) - \frac{1}{2}\chi_{[-1, 1]}(t+1) + \frac{1}{2}\chi_{[-1, 1]}(t-1) - \chi_{[-1, 1]}(t-3).$$

Trasformando membro a membro e osservando dalle tabelle che:

$$\widehat{f(t-t_0)} = \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}, \quad \widehat{\chi_{[-1, 1]}(t)} = 2\frac{\sin \omega}{\omega}, \quad \widehat{f'} = i\omega \widehat{f},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} i\omega \widehat{f}(\omega) &= 2\frac{\sin \omega}{\omega} \left(e^{3i\omega} - \frac{1}{2}e^{i\omega} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} - e^{-3i\omega} \right) \\ &= 2\frac{\sin \omega}{\omega} \left(2i\frac{e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}}{2i} - i\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \right) \\ &= 2i\frac{\sin \omega}{\omega} (2\sin(3\omega) - \sin(\omega)). \end{aligned}$$

e quindi:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \sin \omega (2\sin(3\omega) - \sin \omega).$$

Esercizio 6.3. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{e^{5it}}{t^2 - 4t + 8}.$$

Soluzione 6.3. Posto $g(t) = 1/(t^2 - 4t + 8)$, si ha $f(t) = g(t)e^{5it}$. Per le proprietà della \mathcal{F} -trasformata, si ha: $\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega - 5)$, dove:

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 4t + 8} e^{-i\omega t} dt.$$

La funzione integranda è singolare per $t^2 - 4t + 8 = 0$, ovvero $t_1 = 2 + 2i$, $t_2 = 2 - 2i$. Per il lemma di Jordan, si ottiene allora:

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}; 2 + 2i \right) & \text{se } \omega < 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}; 2 - 2i \right) & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}; 2 + 2i \right) = \lim_{t \rightarrow t_1} (t - t_1) \frac{e^{i\omega t}}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{e^{-i\omega t_1}}{t_1 - t_2} = \frac{e^{-i(2+2i)\omega}}{4i} = \frac{e^{(-2i+2)\omega}}{4i} =$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}; 2 - 2i \right) = \lim_{t \rightarrow t_2} (t - t_2) \frac{e^{i\omega t}}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{e^{-i\omega t_2}}{t_2 - t_1} = \frac{e^{(-2i-2)\omega}}{-4i}$$

Pertanto si ottiene:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2i\omega} e^{-2|\omega|},$$

e il valore in 0 è determinato per continuità (il teorema di Riemann-Lebesgue ci assicura che \hat{g} è continua). Quindi

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2i(\omega-5)} e^{-2|\omega-5|}.$$

Esercizio 6.4. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\cos 4t - \cos 2t}{t^2},$$

calcolare \hat{f} utilizzando opportunamente le tavole.

Soluzione 6.4. Possiamo riscrivere f nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{\cos 4t - 1}{t^2} + \frac{1 - \cos 2t}{t^2} = \frac{1 - \cos 2t}{t^2} - \frac{1 - \cos 4t}{t^2}.$$

Per le formule di bisezione, si ha $1 - \cos 2t = 2 \sin^2 t$ e $1 - \cos 4t = 2 \sin^2 2t$, da cui

$$f(t) = 2 \left(\frac{\sin^2 t}{t^2} - \frac{\sin^2 2t}{t^2} \right).$$

Dalle tavole si ricava che la trasformata di $\sin^2(at)/t^2$, $a > 0$ è

$$\pi \left(a + \frac{\omega}{2} \right) \chi_{[-2a, 0]}(\omega) + \pi \left(a - \frac{\omega}{2} \right) \chi_{[0, 2a]}(\omega),$$

sostituendo nell'espressione della trasformata di f si ha il risultato richiesto.

Esercizio 6.5. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = e^{-8|t|} (1 + 4t^2) \sin(2t),$$

calcolare \hat{f} utilizzando le relazioni fondamentali.

Soluzione 6.5. Si ha:

$$f(t) = e^{8|t|} \sin(2t) + 4t^2 (e^{-8|t|} \sin(2t)).$$

Dalle tavole si ricava che se $g(t) = e^{-8|t|}$, allora $\hat{g}(\omega) = 16/(64 + \omega^2)$, inoltre

$$h(t) = e^{-8|t|} \sin(2t) = \frac{1}{2i} e^{-8|t|} e^{2it} - \frac{1}{2i} e^{-8|t|} e^{-2it},$$

da cui:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2i} \left(\frac{16}{64 + (\omega - 2)^2} - \frac{16}{64 + (\omega + 2)^2} \right).$$

Infine $\hat{f}(\omega) = \hat{h}(\omega) - 4 \frac{d^2}{d\omega^2} \hat{h}(\omega)$.

Esercizio 6.6. Si consideri $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{e^{4it}}{(3+it)(4-it)}.$$

1. Verificare che f è \mathcal{F} -trasformabile.
2. Calcolare \hat{f} .

Soluzione 6.6. Si ha:

$$|f(t)| = \left| \frac{e^{4it}}{(3+it)(4-it)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(9+t^2)(16+t^2)}}.$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(9+t^2)(16+t^2)}} dt.$$

Tale integrale è finito, perché $f \in C^0(\mathbb{R})$ e all'infinito f è asintotica a $1/t^2$, e ciò assicura l'integrabilità. Per quanto riguarda la trasformata, abbiamo $f(t) = g(t)e^{4it}$, con $g(t) = 1/((3+it)(4-it))$. Perciò $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - 4)$. Si ha:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{(3+it)(4-it)} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)} dt.$$

la funzione integranda è singolare in $t_1 = 3i$ e $t_2 = -4i$. Calcoliamo il residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_1 \right) &= \frac{e^{-i\omega t_1}}{t_1 - t_2} = \frac{e^{3\omega}}{7i} \\ \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_2 \right) &= \frac{e^{-i\omega t_2}}{t_2 - t_1} = -\frac{e^{-4\omega}}{7i} \end{aligned}$$

Per il lemma di Jordan, si ha:

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_1 \right) = \frac{2\pi}{7} e^{3\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ -2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_2 \right) = \frac{2\pi}{7} e^{-4\omega} & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Infine:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - 4) = \begin{cases} \frac{2\pi}{7} e^{3(\omega-4)} & \text{se } \omega < 4 \\ \frac{2\pi}{7} e^{-4(\omega-4)} & \text{se } \omega \geq 4 \end{cases}$$

Si osservi che è necessario prestare particolare attenzione alla traslazione di \hat{g} .

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Giuseppe Savaré)

Esercizi in preparazione alla I prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda ³

Pavia, 13 Novembre 2007

Esercizio 6.7. Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2 \sin\left(\frac{3}{z}\right)}{(z-2)(z+2i)}.$$

Senza trascurare z_∞ , determinare le singolarità di f , classificarle e calcolare i relativi residui.

Soluzione 6.7. La funzione è singolare in $z_0 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -2i$. z_1 e z_2 sono poli semplici, mentre z_0 è una singolarità essenziale. Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{4 \sin(3/2)}{2 + 2i} = (1 - i) \sin(3/2) \\ \operatorname{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \frac{-4 \sin(-3/(2i))}{-2i - 2} = \frac{2 \sin(i3/2)}{1 + i} = (1 + i) \sinh(3/2) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda z_∞ , si ha:

$$f(1/z) = \frac{\sin(3z)}{z^2(1/z - 2)(1/z + 2i)} = \frac{\sin(3z)}{(1 - 2z)(1 + 2iz)},$$

e tale funzione è olomorfa in un intorno di $z = 0$, pertanto z_∞ è una singolarità eliminabile. Per calcolare il residuo in z_∞ , poniamo:

$$g(w) = -\frac{f(1/w)}{w^2} = -\frac{1}{w^2} \frac{\frac{1}{w^2} \sin(3w)}{(1/w - 2)(1/w + 2i)} = -\frac{\sin(3w)}{w^2(1 - 2w)(1 + 2iw)}.$$

Si avrà allora:

$$\operatorname{Res}(f, z_\infty) = \operatorname{Res}(g; 0).$$

Si ha che $w = 0$ è un polo semplice per g , quindi:

$$\operatorname{Res}(f, z_\infty) = \operatorname{Res}(g; 0) = \lim_{w \rightarrow 0} wg(w) = -\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin(3w)}{w(1 - 2w)(1 + 2iw)} = -3.$$

Essendo infine:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \operatorname{Res}(f, z_\infty) = 0,$$

si ricava che:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 3 - (1 + i) \sinh(3/2) - (1 - i) \sin(3/2).$$

Esercizio 6.8. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ -1 & \text{se } t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo. Utilizzare quindi l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(Nota: i coefficienti di indice pari dello sviluppo sono nulli.)

³Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

Soluzione 6.8. Proviamo che $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^0 |f(t)|^2 dt + \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 4\pi + \pi = 5\pi < +\infty.$$

Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, essa è sviluppabile in serie di Fourier. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = 2 - 1 = 1 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos kt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos kt dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kt}{k} \right]_{t=-\pi}^{t=0} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin kt}{k} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin kt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kt dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos kt}{k} \right]_{t=-\pi}^{t=0} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos kt}{k} \right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} (1/k - \cos(-k\pi)) + \frac{1}{\pi} (\cos(k\pi)/k - 1/k) \\ &= \frac{1}{\pi k} (-2 + 2\cos(k\pi) + \cos(k\pi) - 1) = \frac{3}{\pi k} (\cos k\pi - 1) \end{aligned}$$

Ciò implica che $b_k = 0$ se k è pari e $b_k = -6/(\pi k)$ se k è dispari.

Osservando che $g(t) = f(t) - 1/2$ è una funzione dispari (infatti vale $3/2$ per $t \in [-\pi, 0]$ e $-3/2$ per $t \in [0, \pi]$) si poteva dedurre immediatamente che $a_k = 0$ per ogni $k > 0$, infatti si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{1}{2} \right) \cos kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt,$$

dove il primo termine è nullo per disparità. Pertanto si ha

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Per la formula di Parseval, si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum a_k^2 + b_k^2,$$

ovvero nel nostro caso:

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{4} + \frac{18}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

da cui si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 6.9. Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 2 orientata positivamente

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{z \sin z}{(z-i)^2} + e^{2z} \right) dz.$$

Soluzione 6.9. La funzione e^{2z} è olomorfa su tutto \mathbb{C} , pertanto il suo integrale esteso ad un qualunque circuito chiuso è nullo. Ci si riconduce quindi allo studio di:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz, \quad f(z) = \frac{z \sin z}{(z-i)^2}.$$

La funzione f presenta un polo doppio per $z_0 = i$. Tale singolarità è interna a Γ . Trattandosi di un polo doppio il calcolo del residuo è:

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (f(z)(z - z_0)^2) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z \sin z) = \sin z_0 + z_0 \cos z_0 = \sin i + i \cos i.$$

Applicando la formula dei residui si ottiene allora:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; z_0) = 2\pi(-\cos i + i \sin i) = -2\pi(\cos(-i) + i \sin(-i)) = -2\pi e^{-i^2} = -2\pi e.$$

Esercizio 6.10. Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\sin(2z) + i \cos(2z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluzione 6.10. Si ha per $h, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin(2z) + i \cos(2z) &= i(-i \sin(2z) + \cos(2z)) = i(i \sin(-2z) + \cos(-2z)) \\ &= i e^{-2iz} = e^{i\pi/2 + i2h\pi} e^{-2iz} = e^{i\pi/2 - 2iz + 2ih\pi} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} &= e^{i\pi/4 + 2ik\pi} \end{aligned}$$

da cui si ricava $\pi/4 + 2k\pi = \pi/2 - 2z + 2h\pi$ e pertanto, posto $n = h - k$, $z = \pi/8 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 6.11. Si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica definita da:

$$u(t) = \begin{cases} -t & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ \pi & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

1. Verificare che u è sviluppabile in serie di Fourier e calcolarne i coefficienti.
2. Studiare la convergenza puntuale della serie.
3. Utilizzando i risultati dei punti precedenti, calcolare la somma della serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Soluzione 6.11.

1. Si ha che la funzione u è periodica e $|u(t)|$ è limitata su $[-\pi, \pi]$, pertanto la funzione è sviluppabile in serie

di Fourier. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 u(t)e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(t)e^{-ikt} dt \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dt = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 u(t)e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(t)e^{-ikt} dt \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 te^{-ikt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-ikt} dt \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{te^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^0 e^{-ikt} dt \right\} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{\pi e^{ik\pi}}{ik} + \frac{1}{ik} \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 \right\} + \frac{1}{2ik} (1 - e^{-ik\pi}) \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^k}{ik} + \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \right) + \frac{1}{2ik} (1 - e^{-ik\pi}) \\
 &= \frac{(-1)^k}{2ik} - \frac{1}{2\pi k^2} (1 - (-1)^k) + \frac{(1 - (-1)^k)}{2ik} = \frac{1}{2ik} - \frac{1 - (-1)^k}{2\pi k^2}
 \end{aligned}$$

2. La funzione u è di classe C^∞ a tratti, per cui la sua serie di Fourier converge a u nei punti di continuità e alla media dei valori destro e sinistro di u nei punti di salto. Nel nostro caso, la funzione è continua in ogni punto ad eccezione dei punti $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dove il limite destro vale π e il limite sinistro vale 0 (si osservi che nei punti $(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ la funzione è continua). Pertanto in 0 la serie di Fourier di u converge a $\pi/2$, cioè si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} &= \frac{3\pi}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{2ik} - \frac{1 - (-1)^k}{2\pi k^2} = \frac{3\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2ik} - \frac{1 - (-1)^k}{2\pi k^2} + \frac{1}{-2ik} - \frac{1 - (-1)^{-k}}{2\pi (-k)^2} \\
 &= \frac{3\pi}{4} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{2\pi k^2}
 \end{aligned}$$

Notiamo che i termini di indice pari della sommatoria sono tutti nulli, per cui si ha:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

pertanto la somma richiesta vale $\pi^2/8$.

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Giuseppe Savaré)

Esercizi in preparazione alla I prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda ⁴

Pavia, 16 Novembre 2007

Esercizio 6.12. Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} \left(\frac{z-2}{z+4i} \right)^n.$$

Soluzione 6.12. Poniamo $w = \frac{z-2}{z+4i}$, $a_n = (n^2 + \log n)^{-1}$. Dal criterio del rapporto, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + \log(n+1)}{n^2 + \log n} = 1,$$

pertanto il raggio di convergenza è 1. Se $|w| < 1$, la serie converge, se $|w| > 1$ diverge. Se $|w| = 1$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Quindi si ha convergenza anche per $|w| = 1$. Si ha $|w| = \frac{|z-2|^2}{|z+4i|^2}$, per cui $|w| < 1$ se $|z-2| < |z+4i|$ ovvero $|z-2|^2 < |z+4i|^2$, quindi posto $z = x + iy$, si ha che $|w| < 1$ se e solo se $(x-2)^2 + y^2 < x^2 + (y+4)^2$, quindi, semplificando, $y > (-3-x)/2$.

Esercizio 6.13. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, determinare il valore dell'integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt,$$

utilizzando metodi di analisi complessa.

Soluzione 6.13. Posto $z = e^{it}$, si ha grazie alle formule di Eulero $\cos t = (z+1/z)/2$, pertanto l'integrale diviene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt = \int_{\gamma} \frac{2z^n}{4 + z + 1/z} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^2 + 4z + 1} dz.$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in senso antiorario. La funzione integranda f è singolare nei punti $z^2 + 4z + 1 = 0$, ovvero $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ e $z_2 = -2 - \sqrt{3}$, che sono poli semplici, e γ non passa per queste singolarità. Si ha $|z_2| = 2 + \sqrt{3} > 1$, per cui z_2 cade all'esterno di γ , mentre $|z_1| = 2 - \sqrt{3} < 1$, quindi z_1 cade all'interno di γ . Calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1 , trattandosi di un polo semplice si avrà:

$$\text{Res}(f; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} f(z)(z - z_1) = \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} = \frac{z_1^n}{2\sqrt{3}}$$

Pertanto, dalla formula dei residui si ha:

$$\frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^2 + 4z + 1} dz = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \text{Res}(f; z_1) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} (\sqrt{3} - 2)^n.$$

⁴ Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22, email: antonio.marigonda@unipv.it

Esercizio 6.14. Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Esistono coefficienti $\hat{u}_k \in \mathbb{C}$ tali che $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k e^{ikt}$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$?
2. Esistono coefficienti $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tali che $e^{\cos 3t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ per $t \in \mathbb{R}$?
3. Esistono coefficienti $\hat{u}_k \in \mathbb{C}$ tali che $\sin |t| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ikt}$ nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$?
4. Esistono coefficienti $a_k \in \mathbb{R}$ tali che $1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi kt)$ nell'intervallo $(-1, 1)$?

Soluzione 6.14.

1. La funzione $u(t) = e^{-t^2}$ è limitata in $[0, 2\pi]$, pertanto essa è sviluppabile in serie di Fourier. Indicati con u_k i coefficienti del suo sviluppo di Fourier rispetto alla base $\{e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\}$, si ottiene che, per ipotesi, $\hat{u}_k = 0$ per $k < 0$. Sviluppando in serie di Fourier rispetto alla base $\{1, \cos kt, \sin kt\}$, si ha:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

e i coefficienti $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, per le formule di Eulero, sono legati a \hat{u}_k da:

$$a_0 = 2\hat{u}_0, \quad (a_k - ib_k) = 2\hat{u}_k, \quad (a_k + ib_k) = 2\hat{u}_{-k}, \quad k > 0.$$

Poiché la funzione è reale, si deve avere $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, inoltre essendo $\hat{u}_k = 0$ per $k < 0$, si ottiene $a_k + ib_k = 0$ da cui $a_k = 0$ e $b_k = 0$ per $k > 0$, quindi $u(t) \equiv \hat{u}_0$. Poiché $u(t)$ non è costante in $(0, 2\pi)$, si conclude che non esistono coefficienti \hat{u}_k che soddisfino la condizione richiesta.

2. La funzione $f(t) = e^{\cos(3t)}$ è limitata, inoltre si ha $e^{\cos(3(t+2\pi))} = e^{\cos(3t)}$, pertanto $f(t+2\pi) = f(t)$ è periodica di periodo 2π . Pertanto essa è sviluppabile in serie di Fourier. Inoltre è di classe C^∞ , pertanto la sua serie di Fourier converge puntualmente a f in ogni punto $t \in \mathbb{R}$. Definiti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt,$$

si ha che tali coefficienti soddisfano alla condizione richiesta.

3. Le funzioni e^{ikt} , $k \in \mathbb{Z}$ sono periodiche di periodo 2π . D'altra parte si ha $\sin |-\pi/2| = \sin(\pi/2) = 1$ mentre $\sin |-\pi/2 + 2\pi| = \sin(3\pi/2) = -1$ quindi tale funzione non è periodica di periodo 2π , pertanto non esistono coefficienti a_0, a_k, b_k con la proprietà richiesta.
4. la funzione $f(t) \equiv 1$ per $t \in (-1, 1)$ è limitata, pertanto è sviluppabile in serie di Fourier e, anzi, si ha che tutti i suoi coefficienti di Fourier ad eccezione di a_0 sono nulli e $a_0 = 1$. Per l'unicità dello sviluppo in serie di Fourier, si ha che non esistono coefficienti con la proprietà richiesta.

Esercizio 6.15. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di

$$u(t) = \cos^2(\pi t) \sin(2\pi t).$$

Soluzione 6.15. La funzione è limitata e periodica di periodo 1, infatti $\sin(2\pi(t+1)) = \sin(2\pi t + 2\pi) = \sin(2\pi t)$, e $\cos^2(\pi(t+1)) = \cos^2(\pi t + \pi) = (-\cos \pi t)^2 = \cos^2(\pi t)$ per cui sviluppabile in serie di Fourier. Ricordando che $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$, si ottiene

$$u(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi t) + 1) \sin(2\pi t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) = \frac{1}{4} \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t).$$

Si ha dunque

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt),$$

con $a_k = 0$ per $k \in \mathbb{N}$, $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1/4$, $b_k = 0$ per $k > 2$.

Esercizio 6.16. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale u 1-periodico, che vale $e^{4\pi t}$ nell'intervallo $(0, 1)$. Calcolare

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+k^2}.$$

Soluzione 6.16. Il segnale è periodico con $T = 1$ e limitato, quindi sviluppabile in serie di Fourier. Si ha $\omega = 2\pi/T$, da cui $\omega = 2\pi$. I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono dati da ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^1 u(t) e^{-i2\pi kt} dt = \int_0^1 e^{4\pi t} e^{-i2\pi kt} dt = \int_0^1 e^{2\pi(2-ik)t} dt = \left[\frac{e^{2\pi(2-ik)t}}{2\pi(2-ik)} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{2\pi(2-ik)} - 1}{2\pi(2-ik)} = \frac{2+ik}{2\pi} \frac{e^{2\pi(2-ik)} - 1}{4+k^2} = \frac{2+ik}{2\pi} \frac{e^{4\pi} [\cos(-2\pi k) + i \sin(-2\pi k)] - 1}{4+k^2} = \frac{2+ik}{2\pi} \frac{e^{4\pi} - 1}{4+k^2} \end{aligned}$$

Posto $a_k = c_k + c_{-k}$ e $-ib_k = c_k - c_{-k}$, si ottiene per $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$:

$$a_0 = \frac{e^{4\pi} - 1}{2\pi}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \frac{e^{4\pi} - 1}{4+k^2}, \quad b_k = -\frac{k}{\pi} \frac{e^{4\pi} - 1}{4+k^2}.$$

Per l'identità di Parseval si ha:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{8\pi t} dt &= \frac{e^{8\pi} - 1}{8\pi}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{4\pi} - 1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4+k^2}} \right)^2 = \left(\frac{e^{4\pi} - 1}{2\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+k^2}, \end{aligned}$$

Pertanto la somma richiesta vale:

$$\frac{e^{8\pi} - 1}{8\pi} \frac{4\pi^2}{(e^{4\pi} - 1)^2} = \frac{(e^{4\pi} - 1)(e^{4\pi} + 1)}{8\pi} \frac{4\pi^2}{(e^{4\pi} - 1)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{4\pi} + 1}{e^{4\pi} - 1} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{\pi}{2} \coth(2\pi).$$

Esercizio 6.17. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\pi} (2 \sin 2t + 4 \cos 4t)(4 \sin 4t + 4 \cos 4t) dt.$$

Soluzione 6.17. Posto $x = 2t$, l'integrale richiesto diventa:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \sin x + 4 \cos 2x)(4 \sin 2x + 4 \cos 2x) dx.$$

Ricordando a questo punto che per $m, n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x) - \sin((m-n)x) dx = 0, \end{aligned}$$

l'integrale richiesto si riduce a:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16 \cos^2 x dt = 8\pi.$$

Esercizio 6.18. Si consideri lo sviluppo in serie di Fourier del segnale 4π -periodico:

$$u(t) = 3\pi - \sum_{k=1}^{+\infty} 6\pi \operatorname{sinc}^2(k/2) \cos(kt/2),$$

che vale $3|t|$ in $(-2\pi, 2\pi)$. Scrivere lo sviluppo di Fourier di $u(t)$ in forma esponenziale e calcolare le serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 6\pi \operatorname{sinc}^2(k/2) \cos(k\pi/2), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (6\pi)^2 \operatorname{sinc}^4(k/2).$$

Si calcoli lo sviluppo di Fourier della funzione 2π -periodica v che coincide con u nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Soluzione 6.18. Si ha, posto $T = 4\pi$ e $\omega = 2\pi/T = 1/2$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} 3|t| dt = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} 3|t| e^{-ikt/2} dt = \frac{3}{4\pi} \left\{ \int_{-2\pi}^0 -te^{-ikt/2} dt + \int_0^{2\pi} te^{-ikt/2} dt \right\} \\ &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} te^{ikt/2} dt + \int_0^{2\pi} te^{-ikt/2} dt \right\} = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt/2} + e^{-ikt/2}}{2} t dt = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(kt/2) dt \\ &= \frac{3}{2\pi} \left\{ \left[t \frac{\sin(kt/2)}{k/2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kt/2)}{k/2} dt \right\} = -\frac{3}{2\pi} \left[\frac{-\cos(kt/2)}{k^2/4} \right]_0^{2\pi} = \frac{6((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \end{aligned}$$

Si osservi che per $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$:

$$2c_0 = a_0 = 6\pi, \quad b_k = c_k - c_{-k} = 0, \quad a_k = c_k + c_{-k} = \frac{12((-1)^k - 1)}{\pi k^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ -\frac{24}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} & \text{se } k = 2n+1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

D'altra parte, ricordando che $\operatorname{sinc}^2(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$, si ritrova:

$$-6\pi \operatorname{sinc}^2(k/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ -\frac{24}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} & \text{se } k = 2n+1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La funzione $u(t) = 3|t|$ è continua in $t = \pi$ e regolare a tratti in $(-2\pi, \pi)$, pertanto la sua serie di Fourier converge puntualmente in $t = \pi$ a $u(\pi)$. Si ha allora:

$$u(\pi) = 3\pi = 3\pi - \sum_{k=1}^{+\infty} 6\pi \operatorname{sinc}^2(k/2) \cos(k\pi/2),$$

pertanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 6\pi \operatorname{sinc}^2(k/2) \cos(k\pi/2) = 0.$$

Tale calcolo poteva essere fatto direttamente ricordando che $\cos(k\pi/2)$ vale 0 se k è dispari e 1 se k è pari, ma $\operatorname{sinc}^2(k/2)$ vale 0 se k è pari.

Sfruttando l'uguaglianza di Parseval, si ha:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

nel nostro caso si ha:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} 9t^2 dt = \frac{9}{4\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = 12\pi^2,$$

da cui:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (6\pi)^2 \operatorname{sinc}^4(k/2) = 2 \cdot \left(12\pi^2 - \frac{36}{4}\pi^2 \right) = 6\pi^2.$$

Si osservi che $u(t) = \frac{1}{2}u(2t)$, pertanto (posto $t/2 = x$):

$$c_k^u = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u(t) e^{-ikt/2} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(2x) e^{-ikx} 2dx = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx = 2c_k^v,$$

ovvero i coefficienti di Fourier di v sono metà di quelli di u .

Esercizio 6.19. Calcolare gli sviluppi in serie di Taylor centrati in 0 delle funzioni:

$$f(z) = \frac{e^{3z^2} - 1}{z^2}, \quad g(z) = \arctan(2z).$$

(Sugg.: ricordare che $\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$)

Soluzione 6.19. Si ha:

$$e^{3z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z^2)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{2n},$$

pertanto:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} z^{2n}.$$

Si ha:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n},$$

pertanto, integrando termine a termine, e ricordando che $g(0) = 0$:

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1},$$

e quindi

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} z^{2n+1}.$$

Esercizio 6.20. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier dei seguenti segnali periodici:

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} -1 & \text{per } t \in (2k-1, 2k), k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{per } t \in (2k, 2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ v(t) &= \begin{cases} -1 & \text{per } t \in (4k-2, 4k), k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{per } t \in (4k, 4k+2), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ w(t) &= \begin{cases} 0 & \text{per } t \in (4k-2, 4k), k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{per } t \in (4k, 4k+2), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Soluzione 6.20. Indicati con T_u, T_v, T_w i periodi di u, v, w rispettivamente, si ha $T_u = 2, T_v = 4, T_w = 4$ da cui $\omega_u = 2\pi/T_u = \pi, \omega_v = \omega_w = \pi/2$. Tutti questi segnali sono periodici e limitati, per cui è possibile calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier.

Notiamo che u e v sono dispari (ovvero $u(-t) = -u(t)$ e $v(-t) = -v(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$). Per quanto riguarda u si ha ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$):

$$\begin{aligned} a_0^u &= a_n^u = 0 \\ b_n^u &= \frac{2}{T_u} \int_{-T_u/2}^{T_u/2} u(t) \sin(n\omega_u t) dt = \int_{-1}^1 u(t) \sin(n\pi t) dt = 2 \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = 2 \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 \\ &= 2 \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \end{aligned}$$

da cui $b_n^u = 0$ per n pari e $b_n^u = 4/(\pi(2j+1))$ se $n = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$. Lo sviluppo in serie di Fourier risulta quindi:

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin((2j+1)\pi t).$$

Osserviamo inoltre che $v(t) = u(t/2)$, pertanto i coefficienti di Fourier di v sono gli stessi di u :

$$c_n^v = \frac{1}{T_v} \int_{-T_v/2}^{T_v/2} v(t) e^{-i\omega_v n t} dt = \frac{1}{2T_u} \int_{-T_u}^{T_u} u(t/2) e^{-it\omega_u/2} dt = \frac{1}{T_u} \int_{-T_u/2}^{T_u/2} u(x) e^{-i\omega_u x} dx = c_n^u.$$

Quindi si ha:

$$v(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin\left((2j+1)\frac{\pi}{2}t\right).$$

Osserviamo infine che $w(t) = (v(t) + 1)/2$, pertanto si avrà $v(t) = 2w(t) - 1$ e perciò:

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin\left((2j+1)\frac{\pi}{2}t\right).$$

Esercizio 6.21. Sia Γ il rettangolo di vertici $2 + \frac{2}{3}i$, $-2 + \frac{2}{3}i$, $-2 - 2i$, $2 - 2i$ percorso in senso antiorario. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{12z^5 - z^4}{z^6 + 1} dz.$$

Soluzione 6.21. Posto

$$f(z) = \frac{12z^5 - z^4}{z^6 + 1} = \frac{z^4(12z - 1)}{z^6 + 1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

si ha che $f(z)$ è singolare per $z^6 + 1 = 0$, ovvero $z^6 = e^{i(\pi+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi si hanno le singolarità $z_k = e^{i\pi/6 + ik\pi/3}$, $k = 0, \dots, 5$. Tali singolarità sono due a due complesse coniugate e si ha:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

e $z_3 = \bar{z}_2$, $z_4 = \bar{z}_1 = -i$, $z_5 = \bar{z}_0$. Si tratta di poli semplici, il cui residuo vale:

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} z^4 (12z - 1) \frac{z - z_k}{(z^6 + 1) - (z_k^6 + 1)} = \frac{12z_k - 1}{6z_k} = 2 - \frac{1}{6z_k},$$

dove si è sfruttato il fatto che $z_k^6 + 1 = 0$ e $z_k^4(12z_k - 1) \neq 0$.

Calcoliamo il residuo all'infinito. Posto:

$$g(z) = -\frac{f(1/z)}{w^2} = -\frac{\frac{1}{z^4} \left(12\frac{1}{z} - 1\right)}{\frac{1}{z^6} + 1} = -\frac{1}{z} \frac{12 - z}{1 + z^6},$$

si ha (osservando che 0 è un polo semplice per g)

$$\text{Res}(f, z_\infty) = \text{Res}(g, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z g(z) = -12.$$

Per quanto riguarda la posizione delle singolarità di f , si ha che z_0, z_2, z_3, z_4, z_5 sono tutte contenute all'interno di Γ , mentre $z_1 = i$ giace all'esterno (come ovviamente z_∞). Si ha allora dalla formula dei residui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{12z^5 - z^4}{z^6 + 1} dz &= \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_2) + \text{Res}(f, z_3) + \text{Res}(f, z_4) + \text{Res}(f, z_5) \\ &= -(\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_\infty)) = -\left(2 - \frac{1}{6i} - 12\right) = 10 - \frac{i}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 6.22. Sia Γ la circonferenza di centro $3i$ e raggio 5 orientata in senso antiorario. Calcolare:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z}{(z^2 - 2z)(z^2 - 4z + 13)} dz.$$

Soluzione 6.22. Poniamo:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 2z)(z^2 - 4z + 13)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

La funzione f è singolare per $(z^2 - 2z)(z^2 - 4z + 13) = 0$, ovvero per $z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = 2 + 3i, z_3 = 2 - 3i$. Si ha che z_0 è singolarità eliminabile, mentre z_1, z_2, z_3 sono poli semplici. Una singolarità $z_k, k = 0, 1, 2, 3$ cade all'interno di Γ se e solo se si ha: $|z_k - 3i| < 5^2$. Pertanto le singolarità che cadono all'interno di Γ sono solo z_0, z_1 e z_2 . Di queste, z_0 è eliminabile e pertanto il suo residuo è nullo, le altre sono poli semplici.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z^2 - 4z + 13} = \frac{1}{9}. \\ \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_3)} = \frac{1}{3i \cdot 6i} = -\frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Per la formula dei residui si ha:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z}{(z^2 - 2z)(z^2 - 4z + 13)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)) = \frac{\pi i}{9}.$$

Esercizio 6.23. Sia Γ la circonferenza di centro 4 e raggio 2π , calcolare:

$$\int_{\Gamma} \frac{5}{e^z + e^{ai}} dz.$$

Soluzione 6.23. Non è restrittivo supporre $0 \leq \text{Im}(a) < 2\pi$, infatti, $e^{a+i2k\pi} = e^a$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poniamo $f_a(z) = 5/(e^z + e^{ai}), z \in \mathbb{C}$ e studiamone le singolarità. La funzione $f_a(z)$ è singolare nei punti dove $e^z = -e^{ai}$, ovvero $e^z = e^a e^{i3\pi/2 + i2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$, quindi per $z_k = a + i\pi(3/2 + 2k), k \in \mathbb{Z}$. Si tratta, come risulterà dal seguente calcolo, di poli semplici:

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)f_a(z) = 5 \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{(e^z + e^{ai}) - (e^{z_k} + e^{ai})} = \frac{5}{e^{z_k}} = \frac{5i}{e^a}$$

Pertanto $\text{Res}(f_a, z_k^a) = 5i/e^a$.

Per semplicità, poniamo $x_a = \text{Re}(a)$ e $y_a = \text{Im}(a)$. Studiamo quali singolarità cadono all'interno di Γ , osservando che $|z_k - 4|^2 = (x_a - 4)^2 + (\pi(3/2 + 2k) + y_a)^2$.

Se $|x_a - 4| > 2\pi$, ovvero $x_a < 4 - 2\pi$ o $x_a > 4 + 2\pi$, si ha $|z_k - 4| > 2\pi$ quindi all'interno di Γ non cadono singolarità, quindi l'integrale richiesto è nullo. Poiché il residuo in z_k è sempre $\frac{5i}{e^a}$, si ha che se su Γ non cadono singolarità, l'integrale è pari a:

$$\int_{\Gamma} \frac{5}{e^z + e^{ai}} dz = 2\pi i \sum_{|z_k - 4| < 2\pi} \text{Res}(f_a, z_k) = -\frac{10\pi}{e^a} \cdot N_a,$$

dove N_a è il numero di singolarità che cadono all'interno di Γ . Studiamo perciò, al variare di $k \in \mathbb{Z}$:

$$(x_a - 4)^2 + (3\pi/2 + 2k\pi + y_a)^2 < 4\pi^2.$$

$$\left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{y_a}{2\pi} + k\right)^2 < 1.$$

A questo punto poniamo $\tilde{x}_a = \frac{x_a - 4}{2\pi}$ e $\tilde{y}_a = \frac{3}{4} + \frac{y_a}{2\pi}$ ottenendo che per $0 \leq y_a < 2\pi$ si ha $\frac{3}{4} \leq \tilde{y}_a < \frac{7}{4}$, e la disequazione:

$$\tilde{x}_a^2 + (\tilde{y}_a + k)^2 < 1.$$

Condizione necessaria perché tale disequazione sia soddisfatta è che $(\tilde{y}_a + k)^2 < 1$, ed essendo $\frac{3}{4} \leq \tilde{y}_a < \frac{7}{4}$, ciò implica necessariamente che se $k, \tilde{x}_a, \tilde{y}_a$ soddisfano la disequazione, allora $3/4 + k < 1$ e $7/4 + k > -1$ pertanto $k \in \{-2, -1, 0\}$.

Nel caso $k = 0$, si ha: $|z_0 - 4| < 2\pi \Leftrightarrow \tilde{x}_a^2 + \tilde{y}_a^2 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{y_a}{2\pi}\right)^2 < 1$.

Nel caso $k = -1$, si ha: $|z_{-1} - 4| < 2\pi \Leftrightarrow \tilde{x}_a^2 + (\tilde{y}_a - 1)^2 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{y_a}{2\pi}\right)^2 < 1$.

Nel caso $k = -2$, si ha: $|z_{-2} - 4| < 2\pi \Leftrightarrow \tilde{x}_a^2 + (\tilde{y}_a - 2)^2 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4} + \frac{y_a}{2\pi}\right)^2 < 1$.

Si ha dunque: Posto $Q = \{z \in \mathbb{C} : 3/4 \leq \text{Im}(z) < 7/4\}$, $B_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$, $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < 1\}$, $\tilde{a} = \tilde{x}_a + i\tilde{y}_a$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \in Q \cap \left((B_0 \cup B_2) \setminus B_1 \cup (B_2 \setminus (B_0 \cup B_2)) \right) &= Q \cap \left((B_2 \setminus B_1) \cup (B_2 \setminus (B_0 \cup B_2)) \right) \Rightarrow N_a = 1. \\ \tilde{a} \in Q \cap \left((B_0 \cup B_2) \cap B_1 \right) &\Rightarrow N_a = 2. \\ \tilde{a} \in Q \setminus \overline{(B_0 \cup B_1 \cup B_2)} &\Rightarrow N_a = 0. \end{aligned}$$

L'integrale non esiste se $\tilde{a} \in Q \cap (\partial B_0 \cup \partial B_1 \cup \partial B_2)$. Si osservi che $Q \cap (B_0 \setminus B_1) = \emptyset$. Nel caso particolare $a \in \mathbb{R}$, ovvero $y_a = 0$, si ha che $|z_{-2} - 4| > 2\pi$. La discussione diventa:

$$|z_0 - 4| < 2\pi \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \frac{9}{16} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 < \frac{7}{16} \Leftrightarrow |x_a - 4| < \frac{\pi}{2}\sqrt{7}.$$

$$|z_{-1} - 4| < 2\pi \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{16} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_a - 4}{2\pi}\right)^2 < \frac{15}{16} \Leftrightarrow |x_a - 4| < \frac{\pi}{2}\sqrt{15}.$$

Pertanto, si ha (ricordando $a = x_a \in \mathbb{R}$)

$$\int_{\Gamma} \frac{5}{e^z + e^{ai}} dz = \begin{cases} -20\pi e^{-a} & \text{se } |a - 4| < \frac{\pi}{2}\sqrt{7} \\ \text{non esiste} & \text{se } a = 4 \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{7} \\ -10\pi e^{-a} & \text{se } \frac{\pi}{2}\sqrt{7} < |a - 4| < \frac{\pi}{2}\sqrt{15} \\ \text{non esiste} & \text{se } a = 4 \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{15} \\ 0 & \text{se } |a - 4| > \frac{\pi}{2}\sqrt{15}. \end{cases}$$

Esercizio 6.24. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 9t^4} dt.$$

Soluzione 6.24. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{1 + 9z^4}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si ha che f presenta singolarità per $9z^4 + 1 = 0$ ovvero per $z^4 = \frac{1}{9}e^{i(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi per $z_k = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}e^{i(2k+1)\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Si tratta di poli semplici, il calcolo del residuo è immediato:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{(1 + 9z^4) - (1 + 9z_k^4)} = \frac{1}{9 \cdot 4z_k^3} = -\frac{z_k}{4}.$$

Si ha che z_0 e z_1 hanno parte immaginaria strettamente positiva, mentre le loro coniugate z_3 e z_2 hanno parte immaginaria strettamente negativa. Fissato $R > \max_k |z_k|$, consideriamo il circuito γ_R costituito dall'arco di circonferenza centrato nell'origine passante per R e $-R$ e giacente nel semipiano dei complessi con parte immaginaria strettamente positiva, orientato in senso antiorario, e dal segmento reale congiungente $-R$ a R .

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1))$$

Si ha che, per $R \rightarrow \infty$ l'integrale di f sul pezzo curvo tende a zero perché il grado del denominatore di f è di quattro unità superiore a quello del numeratore, e l'altro tende all'integrale richiesto. Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 9t^4} dt = 2\pi i \left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_0}{4} \right) = \frac{\pi\sqrt{6}}{6},$$

ricordando le definizioni di z_0 e z_1 .

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Giuseppe Savaré)

Correzione Esercizi I prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda ⁵

Pavia, 4 Dicembre 2007

Esercizio 6.25.

1. Sia Γ_1 la circonferenza di centro i e raggio $\sqrt{5}$ orientata in senso antiorario. Calcolare:

$$\oint_{\Gamma_1} \left(\frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5} + \cos(5z) \right) dz$$

2. Sia Γ_2 la circonferenza di centro $2i$ e raggio $\sqrt{5}$ orientata in senso antiorario. Calcolare:

$$\oint_{\Gamma_2} \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} + \cos(5z) \right) dz$$

3. Sia Γ_3 la circonferenza di centro $3i$ e raggio $\sqrt{10}$ orientata in senso antiorario. Calcolare:

$$\oint_{\Gamma_3} \left(\frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10} + \cos(10z) \right) dz$$

4. Sia Γ_4 la circonferenza di centro $4i$ e raggio $\sqrt{20}$ orientata in senso antiorario. Calcolare:

$$\oint_{\Gamma_4} \left(\frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20} + \cos(20z) \right) dz$$

Soluzione 6.25.

1. La funzione $\cos(5z)$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , pertanto il suo integrale esteso ad un qualunque circuito chiuso è nullo.

$$\oint_{\Gamma_1} \left(\frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5} + \cos(5z) \right) dz = \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5} \right) + \oint_{\Gamma_1} \cos(5z) dz = \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5} \right) dz.$$

Studiamo le singolarità della funzione integranda

$$f(z) = \frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5}.$$

Esse corrispondono alle soluzioni di $z^2 + 4z + 5 = 0$, ovvero $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -2 - i$. Per studiare se cadono all'interno di Γ_1 , andiamo a calcolare la loro distanza dal centro di Γ_1 . Si ha $|z_1 - i| = 2 < \sqrt{5}$ pertanto z_1 è interna a Γ_1 , mentre $|z_2 - i| = |-2 - 2i| = \sqrt{8} > \sqrt{5}$, pertanto z_2 è esterna. Si poteva arrivare allo stesso risultato disegnando sul piano complesso la circonferenza Γ_1 e le due singolarità. z_1 è un polo semplice, calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{e^{z_1+2}}{z_1 - z_2} = \frac{e^i}{2i}.$$

⁵Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

Per la formula dei residui, si ha:

$$\oint_{\Gamma_1} \left(\frac{e^{z+2}}{z^2 + 4z + 5} + \cos(5z) \right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \pi e^i.$$

2. La funzione $\cos(5z)$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , pertanto il suo integrale esteso ad un qualunque circuito chiuso è nullo.

$$\oint_{\Gamma_2} \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} + \cos(5z) \right) dz = \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} \right) + \oint_{\Gamma_2} \cos(5z) dz = \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} \right) dz.$$

Studiamo le singolarità della funzione integranda

$$f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5}.$$

Esse corrispondono alle soluzioni di $z^2 + 2z + 5 = 0$, ovvero $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$. Per studiare se cadono all'interno di Γ_2 , andiamo a calcolare la loro distanza dal centro di Γ_1 . Si ha $|z_1 - 2i| = 1 < \sqrt{5}$ pertanto z_1 è interna a Γ_2 , mentre $|z_2 - 2i| = |-2 - 4i| = \sqrt{20} > \sqrt{5}$, pertanto z_2 è esterna. Si poteva arrivare allo stesso risultato disegnando sul piano complesso la circonferenza Γ_2 e le due singolarità. z_1 è un polo semplice, calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{e^{z_1+1}}{z_1 - z_2} = \frac{e^{2i}}{4i}.$$

Per la formula dei residui, si ha:

$$\oint_{\Gamma_2} \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} + \cos(5z) \right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{\pi}{2} e^{2i}.$$

3. La funzione $\cos(10z)$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , pertanto il suo integrale esteso ad un qualunque circuito chiuso è nullo.

$$\oint_{\Gamma_3} \left(\frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10} + \cos(10z) \right) dz = \oint_{\Gamma_3} \left(\frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10} \right) + \oint_{\Gamma_3} \cos(10z) dz = \oint_{\Gamma_3} \left(\frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10} \right) dz.$$

Studiamo le singolarità della funzione integranda

$$f(z) = \frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10}.$$

Esse corrispondono alle soluzioni di $z^2 - 2z + 10 = 0$, ovvero $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$. Per studiare se cadono all'interno di Γ_3 , andiamo a calcolare la loro distanza dal centro di Γ_3 . Si ha $|z_1 - 3i| = 1 < \sqrt{10}$ pertanto z_1 è interna a Γ_3 , mentre $|z_2 - 3i| = |1 - 6i| = \sqrt{37} > \sqrt{10}$, pertanto z_2 è esterna. Si poteva arrivare allo stesso risultato disegnando sul piano complesso la circonferenza Γ_3 e le due singolarità. z_1 è un polo semplice, calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{e^{z_1-1}}{z_1 - z_2} = \frac{e^{3i}}{6i}.$$

Per la formula dei residui, si ha:

$$\oint_{\Gamma_3} \left(\frac{e^{z-1}}{z^2 - 2z + 10} + \cos(10z) \right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{\pi}{3} e^{3i}.$$

4. La funzione $\cos(20z)$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , pertanto il suo integrale esteso ad un qualunque circuito chiuso è nullo.

$$\oint_{\Gamma_4} \left(\frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20} + \cos(20z) \right) dz = \oint_{\Gamma_4} \left(\frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20} \right) + \oint_{\Gamma_4} \cos(20z) dz = \oint_{\Gamma_4} \left(\frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20} \right) dz.$$

Studiamo le singolarità della funzione integranda

$$f(z) = \frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20}.$$

Esse corrispondono alle soluzioni di $z^2 - 4z + 20 = 0$, ovvero $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 2 - 4i$. Per studiare se cadono all'interno di Γ_4 , andiamo a calcolare la loro distanza dal centro di Γ_4 . Si ha $|z_1 - 4i| = 2 < \sqrt{20}$ pertanto z_1 è interna a Γ_4 , mentre $|z_2 - 4i| = |1 - 8i| = \sqrt{65} > \sqrt{20}$, pertanto z_2 è esterna. Si poteva arrivare allo stesso risultato disegnando sul piano complesso la circonferenza Γ_4 e le due singolarità. z_1 è un polo semplice, calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{e^{z_1-2}}{z_1 - z_2} = \frac{e^{4i}}{8i}.$$

Per la formula dei residui, si ha:

$$\oint \left(\frac{e^{z-2}}{z^2 - 4z + 20} + \cos(20z) \right) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_1) = \frac{\pi}{4} e^{4i}.$$

Esercizio 6.26.

1. Si consideri il segnale reale u_1 3-periodico definito nell'intervallo $[0, 3)$ da:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 2) \\ 1 & t \in [2, 3) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il segnale è sviluppabile in serie di Fourier e averne disegnato il grafico, scriverne lo sviluppo in forma esponenziale e trigonometrica. Calcolare infine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}k) \cos(\frac{2\pi}{3}k)}{k\pi}.$$

2. Si consideri il segnale reale u_2 4-periodico definito nell'intervallo $[0, 4)$ da:

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 3) \\ 1 & t \in [3, 4) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il segnale è sviluppabile in serie di Fourier e averne disegnato il grafico, scriverne lo sviluppo in forma esponenziale e trigonometrica. Calcolare infine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k) \cos(\frac{\pi}{2}k)}{k\pi}.$$

3. Si consideri il segnale reale u_3 5-periodico definito nell'intervallo $[0, 5)$ da:

$$u_3(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 4) \\ 1 & t \in [4, 5) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il segnale è sviluppabile in serie di Fourier e averne disegnato il grafico, scriverne lo sviluppo in forma esponenziale e trigonometrica. Calcolare infine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{5}k) \cos(\frac{2\pi}{5}k)}{k\pi}.$$

4. Si consideri il segnale reale u_4 6-periodico definito nell'intervallo $[0, 6)$ da:

$$u_4(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 5) \\ 1 & t \in [5, 6) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il segnale è sviluppabile in serie di Fourier e averne disegnato il grafico, scriverne lo sviluppo in forma esponenziale e trigonometrica. Calcolare infine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}k) \cos(\frac{\pi}{3}k)}{k\pi}.$$

Soluzione 6.26. Sia u uno dei segnali dell'esercizio, detto T il suo periodo, poniamo $\omega = 2\pi/T$. u è limitato e periodico quindi sviluppabile in serie di Fourier. Sia $0 \leq t \leq T$. Si ha $u(-t) = u(T-t)$ per periodicità. Dal grafico, oppure per calcolo diretto, si ottiene poi $u(T-t) = u(t)$. Quindi $u(t) = u(-t)$. Il segnale pertanto è pari, quindi nel suo sviluppo in serie di Fourier tutti i coefficienti dei termini seno sono nulli. I coefficienti nello sviluppo esponenziale sono ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 dt = \frac{2}{T}. \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{-ik\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-ik\omega t}}{-ik\omega} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{ikT\omega} (e^{ik\omega} - e^{-ik\omega}) = \frac{e^{ik\omega} - e^{-ik\omega}}{ik2\pi} \\ &= \frac{\sin(k\omega)}{k\pi}. \end{aligned}$$

Notiamo che $c_k = c_{-k}$. Nello sviluppo trigonometrico si ha ($k \in \mathbb{N}$):

$$a_0 = 2c_0 = \frac{4}{T}, \quad a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k = 2 \frac{\sin(k\omega)}{k\pi}, \quad b_k = 0.$$

Si ha dunque:

$$u(t) = \frac{2}{T} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(k\omega)}{k\pi} e^{ik\omega t} = \frac{2}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega)}{k\pi} \cos(k\omega t).$$

Nella fattispecie si ha:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2}{3}\pi, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = \frac{2}{5}\pi, \quad \omega_4 = \frac{2\pi}{T_4} = \frac{\pi}{3},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(2k\pi/3)}{k\pi} e^{2ik\pi/3t} = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2k\pi/3)}{k\pi} \cos(2k\pi/3t) \\ u_2(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{ik\pi/2t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k\pi/2)}{k\pi} \cos(k\pi/2t) \\ u_3(t) &= \frac{2}{5} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(2k\pi/5)}{k\pi} e^{2ik\pi/5t} = \frac{2}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2k\pi/5)}{k\pi} \cos(2k\pi/5t) \\ u_4(t) &= \frac{1}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(k\pi/3)}{k\pi} e^{ik\pi/3t} = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k\pi/3)}{k\pi} \cos(k\pi/3t) \end{aligned}$$

Poiché u è regolare a tratti, la sua serie di Fourier in t converge a t nei punti di continuità e alla media tra il limite destro e il limite sinistro di u nei punti di discontinuità. Nel nostro caso, in $t = 1$ il segnale u è discontinuo e si ha

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} u(t) = 1.$$

Pertanto per $t = 1$ la serie converge a $1/2$, perciò:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega)}{k\pi} \cos(k\omega t),$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega)}{k\pi} \cos(k\omega t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{T} \right) = \frac{T-4}{4T}.$$

Nella fattispecie si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}k) \cos(\frac{2\pi}{3}k)}{k\pi} &= -\frac{1}{12} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k) \cos(\frac{\pi}{2}k)}{k\pi} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{5}k) \cos(\frac{2\pi}{5}k)}{k\pi} &= \frac{1}{20} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}k) \cos(\frac{\pi}{3}k)}{k\pi} &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Esercizio 6.27. Trovare le radici in campo complesso delle equazioni:

1. $z^3 + 8i = 0, e^z - 1 = -i$
2. $z^3 - 8i = 0, e^z + 1 = i$
3. $z^3 - 27i = 0, e^z + 2 = -2i$
4. $z^3 + 27i = 0, e^z - 2 = -2i$

Soluzione 6.27.

$$\begin{aligned} z^3 + 8i = 0 &\Rightarrow z^3 = 2^3(-i) = 2^3 e^{-i\pi/2+2k\pi} \Rightarrow z_k = 2e^{-i\pi/6+2k\pi/3}, k = 0, 1, 2 \\ &\Rightarrow z_0 = 2e^{-i\pi/6}, z_1 = 2e^{i\pi/2}, z_2 = 2e^{i\pi 7/6} \\ &\Rightarrow z_0 = \sqrt{3} - i, z_1 = 2i, z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z^3 - 8i = 0 &\Rightarrow z^3 = 2^3 i = 2^3 e^{i\pi/2+2k\pi} \Rightarrow z_k = 2e^{i\pi/6+2k\pi/3}, k = 0, 1, 2 \\ &\Rightarrow z_0 = 2e^{i\pi/6}, z_1 = 2e^{i\pi 5/6}, z_2 = 2e^{i\pi 9/6} = 2e^{i\pi 3/2} = 2e^{-i\pi/2} \\ &\Rightarrow z_0 = \sqrt{3} + i, z_1 = -\sqrt{3} + i, z_2 = -2i \\ z^3 + 27i = 0 &\Rightarrow z^3 = 3^3(-i) = 3^3 e^{-i\pi/2+2k\pi} \Rightarrow z_k = 3e^{-i\pi/6+2k\pi/3}, k = 0, 1, 2 \\ &\Rightarrow z_0 = 3e^{-i\pi/6}, z_1 = 3e^{i\pi/2}, z_2 = 3e^{i\pi 7/6} \\ &\Rightarrow z_0 = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), z_1 = 3i, z_2 = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \\ z^3 - 27i = 0 &\Rightarrow z^3 = 3^3 i = 3^3 e^{i\pi/2+2k\pi} \Rightarrow z_k = 3e^{i\pi/6+2k\pi/3}, k = 0, 1, 2 \\ &\Rightarrow z_0 = 3e^{i\pi/6}, z_1 = 3e^{i\pi 5/6}, z_2 = 3e^{i\pi 9/6} = 2e^{i\pi 3/2} = 2e^{-i\pi/2} \\ &\Rightarrow z_0 = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), z_1 = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), z_2 = -3i \end{aligned}$$

$$e^z - 1 = -i \Rightarrow e^z = 1 - i \Rightarrow z = \log(|1 - i|) + i \arg(1 - i) = \frac{1}{2} \log 2 + i(-\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$e^z + 1 = i \Rightarrow e^z = -1 + i \Rightarrow z = \log(|-1 + i|) + i \arg(-1 + i) = \frac{1}{2} \log 2 + i(3\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$e^z + 2 = -2i \Rightarrow e^z = -2 - 2i \Rightarrow z = \log(|-2 - 2i|) + i \arg(-2 - 2i) = \frac{1}{2} \log 8 + i(-3\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$e^z - 2 = -2i \Rightarrow e^z = 2 - 2i \Rightarrow z = \log(|2 - 2i|) + i \arg(2 - 2i) = \frac{1}{2} \log 8 + i(-\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 6.28. Determinare la somma e il raggio di convergenza delle serie di potenze:

$$\begin{array}{cccc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^n}{n!}, & \sum_{n=1}^{+\infty} 2n z^{2n-2}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} z^n}{n!}, & \sum_{n=1}^{+\infty} 3n z^{3n-3} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1} z^n}{n!}, & \sum_{n=1}^{+\infty} 4n z^{4n-4}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-1} z^n}{n!}, & \sum_{n=1}^{+\infty} 5n z^{5n-5} \end{array}$$

Soluzione 6.28. Sia $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ e consideriamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1} z^n}{n!} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} = \frac{e^{az}}{a}$$

e il suo raggio di convergenza è $r = \infty$.

Sia $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ e consideriamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a n z^{an-a} = a \sum_{n=0}^{\infty} n (z^a)^{n-1}$$

Posto $w = z^a$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a n z^{an-a} = a \sum_{n=0}^{\infty} n w^{n-1} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dw} w^n = a \frac{d}{dw} \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right) = a \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{1-w} \right) = \frac{a}{(1-w)^2} = \frac{a}{(1-z^a)^2}$$

e il suo raggio di convergenza è quello della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} (z^a)^n$, quindi si deve avere $|z^a| < 1$ e quindi $r = 1$.

Esercizio 6.29. Sia Γ_1 il rettangolo di vertici $3/2 - i4/3$, $3/2 + i4/3$, $-1/2 + i4/3$, $-1/2 - i4/3$, orientato in senso antiorario. Calcolare

$$I_1 := \oint_{\Gamma_1} \frac{3z^3}{\sin \pi z^2} dz$$

Sia Γ_2 il rettangolo di vertici $4/3 - i/2$, $4/3 + i3/2$, $-4/3 + i3/2$, $-4/3 - i3/2$, orientato in senso antiorario. Calcolare

$$I_2 := \oint_{\Gamma_2} \frac{2z^3}{\sin \pi z^2} dz$$

Sia Γ_3 il rettangolo di vertici $4/3 - i3/2$, $4/3 + i/2$, $-4/3 + i/2$, $-4/3 - i3/2$, orientato in senso antiorario. Calcolare

$$I_3 := \oint_{\Gamma_3} \frac{4z^3}{\sin \pi z^2} dz$$

Sia Γ_4 il rettangolo di vertici $1/2 - i4/3$, $1/2 + i4/3$, $-3/2 + i4/3$, $-3/2 - i4/3$, orientato in senso antiorario. Calcolare

$$I_4 := \oint_{\Gamma_4} \frac{5z^3}{\sin \pi z^2} dz$$

Soluzione 6.29. Da sistemare

Studiamo la funzione:

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin \pi z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sarà utile in seguito osservare che f presenta le seguenti simmetrie:

$$f(-z) = \frac{(-z)^3}{\sin \pi(-z)^2} = -f(z), \quad f(iz) = \frac{(iz)^3}{\sin \pi(iz)^2} = -i \frac{z^3}{\sin(-\pi z^2)} = if(z).$$

La funzione f presenta singolarità nei punti dove $\sin(\pi z^2) = 0$, ovvero per $\pi z^2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ovvero per $z_k = \sqrt{k}$ con $k \geq 0$, per $z_k = -\sqrt{k}$ con $k \geq 0$, per $w_k = i\sqrt{-k}$ con $k < 0$ e per $w_k = -i\sqrt{-k}$ con $k < 0$. La singolarità $z_0 = 0$ è eliminabile, infatti $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$. All'interno di Γ_1 cadono: z_1, z_2, w_{-1}, w_1 . All'interno di Γ_2 cadono: z_1, z_{-1}, w_1, w_2 . All'interno di Γ_3 cadono: $z_1, z_{-1}, w_{-1}, w_{-2}$. All'interno di Γ_4 cadono: $z_{-1}, z_{-2}, w_1, w_{-1}$.

Nella fattispecie $z_1 = 1, z_2 = \sqrt{2}, z_{-1} = -z_1 = -1, z_{-2} = -\sqrt{2}, w_1 = iz_1 = i, w_2 = iz_2 = i\sqrt{2}, w_{-1} = -w_1 = -i, w_{-2} = -w_2 = -i\sqrt{2}$.

Grazie alle simmetrie di f , si ha in particolare per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\zeta} (z + \zeta)f(z) &= - \lim_{-z \rightarrow \zeta} (-z - \zeta)f(z) = - \lim_{w \rightarrow \zeta} (w - \zeta)f(-w) = \lim_{w \rightarrow \zeta} (w - \zeta)f(w) = \lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)f(z) \\ \lim_{z \rightarrow i\zeta} (z - i\zeta)f(z) &= i \lim_{-iz \rightarrow \zeta} (-iz - \zeta)f(z) = i \lim_{w \rightarrow \zeta} (w - \zeta)f(iw) = - \lim_{w \rightarrow \zeta} (w - \zeta)f(w) = - \lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)f(z) \end{aligned}$$

Tali singolarità sono poli semplici:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - z_1)z^3}{\sin(\pi z^2)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)((z - 1) + 1)^3}{\sin(\pi(z - 1 + 1)^2)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + 1)^3}{\sin(\pi(w + 1)^2)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + 1)^3}{\sin(\pi w^2 + 2\pi w + \pi)} \\ &= - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + 1)^3}{\sin(\pi w^2 + 2\pi w)} = - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + 1)^3}{\sin(\pi w^2) \cos(2\pi w) + \cos(\pi w^2) \sin(2\pi w)} \\ &= - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{(w + 1)^3}{\frac{\sin(\pi w^2)}{w} \cos(2\pi w) + \cos(\pi w^2) \frac{\sin(2\pi w)}{w}} = - \frac{1}{2\pi} \\ \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}} (z - \sqrt{2})f(z) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(z - z_2)z^3}{\sin(\pi z^2)} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(z - \sqrt{2})((z - \sqrt{2}) + \sqrt{2})^3}{\sin(\pi(z - \sqrt{2} + \sqrt{2})^2)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + \sqrt{2})^3}{\sin(\pi(w + \sqrt{2})^2)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + \sqrt{2})^3}{\sin(\pi w^2 + 2\sqrt{2}\pi w + 2\pi)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + \sqrt{2})^3}{\sin(\pi w^2 + 2\sqrt{2}\pi w)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + \sqrt{2})^3}{\sin(\pi w^2) \cos(2\sqrt{2}\pi w) + \cos(\pi w^2) \sin(2\sqrt{2}\pi w)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{(w + \sqrt{2})^3}{\frac{\sin(\pi w^2)}{w} \cos(2\sqrt{2}\pi w) + \cos(\pi w^2) \frac{\sin(2\sqrt{2}\pi w)}{w}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Dai calcoli precedenti, sfruttando le simmetrie di f , otteniamo i residui:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) = \operatorname{Res}(f, z_{-1}) &= -\frac{1}{2\pi}, & \operatorname{Res}(f, w_1) = \operatorname{Res}(f, w_{-1}) &= \frac{1}{2\pi}. \\ \operatorname{Res}(f, z_2) = \operatorname{Res}(f, z_{-2}) &= \frac{1}{\pi}, & \operatorname{Res}(f, w_2) = \operatorname{Res}(f, w_{-2}) &= -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Si poteva procedere anche nel seguente modo alternativo:

ricordiamo il seguente criterio: sia $f(z) = h(z)/g(z)$, e sia z_0 un punto per cui si abbia h, g olomorfe in un intorno di z_0 , $h(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$. Allora si ha:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} h(z) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Osserviamo che, nel nostro caso si ha $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ con $h(z) = z^3$, $g(z) = \sin(\pi z^2)$ olomorfe. Inoltre $g'(z) = 2\pi z \cos(\pi z^2) = -g'(-z)$ e $g'(iz) = 2\pi iz \cos(-\pi z) = i2\pi z \cos(\pi z) = ig'(z)$. Si ha:

$$\begin{array}{llll} h(z_1) = 1 & h(z_{-1}) = -1 & h(z_2) = 2\sqrt{2} & h(z_{-2}) = -2\sqrt{2} \\ g'(z_1) = -2\pi & g'(z_{-1}) = 2\pi & g'(z_2) = 2\sqrt{2}\pi & g'(z_{-2}) = -2\sqrt{2}\pi \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h(w_1) = -i & h(w_{-1}) = i & h(w_2) = -i2\sqrt{2} & h(w_{-2}) = i2\sqrt{2} \\ g'(w_1) = -2i\pi & g'(w_{-1}) = 2i\pi & g'(w_2) = i2\sqrt{2}\pi & g'(w_{-2}) = -i2\sqrt{2}\pi \end{array}$$

$g(z_{\pm 1}) = g(w_{\pm 1}) = 0$, $g'(z) = 2\pi z \cos(\pi z^2)$, e si ha $g'(z_{\pm 1}) = \pm 2\pi \cos(\pi) = \mp 2\pi$, $g'(w_{\pm 1}) = \pm 2\pi i \cos(-\pi) = \mp 2\pi i$. Dal criterio precedente si ha allora:

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \operatorname{Res}(f, z_{-1}) = -\frac{1}{2\pi}, \quad \operatorname{Res}(f, w_1) = \operatorname{Res}(f, w_{-1}) = \frac{1}{2\pi}.$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \operatorname{Res}(f, z_{-2}) = \frac{1}{\pi}, \quad \operatorname{Res}(f, w_2) = \operatorname{Res}(f, w_{-2}) = -\frac{1}{\pi}.$$

Dal teorema dei residui si ha:

$$I_1 = 3 \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 3 \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_{-1})) = 3i(-1 + 2 + 1 + 1) = 9i$$

$$I_2 = 2 \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 2 \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_{-1}) + \operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_2)) = 2i(-1 - 1 + 1 - 2) = -6i$$

$$I_3 = 4 \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 4 \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_{-1}) + \operatorname{Res}(f, w_{-1}) + \operatorname{Res}(f, w_{-2})) = 4i(-1 - 1 + 1 - 2) = -12i$$

$$I_4 = 5 \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 5 \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_{-1}) + \operatorname{Res}(f, z_{-2}) + \operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_{-1})) = 5i(-1 + 1 + 1 + 2) = 15i$$

Esercizio 6.30.

1. Sia u_1 un segnale reale 4-periodico i cui coefficienti a_5, b_5 valgano entrambi 2.

E' possibile che $\int_0^4 u^2(t) dt = 4$?

Sapendo che $\int_0^4 u^2(t) dt = 16$, determinare $\frac{1}{4} \int_0^4 u(t) \cos(\pi t) dt$.

2. Sia u_2 un segnale reale 3-periodico i cui coefficienti a_3, b_3 valgano entrambi 2.

E' possibile che $\int_0^3 u^2(t) dt = 3$?

Sapendo che $\int_0^3 u^2(t) dt = 12$, determinare $\frac{1}{4} \int_0^4 u(t) \cos(\frac{2\pi}{3}t) dt$.

3. Sia u_3 un segnale reale 5-periodico i cui coefficienti a_7, b_7 valgano entrambi 2.

E' possibile che $\int_0^7 u^2(t) dt = 5$?

Sapendo che $\int_0^5 u^2(t) dt = 20$, determinare $\frac{1}{5} \int_0^5 u(t) \cos(\frac{4\pi}{5}t) dt$.

4. Sia u_4 un segnale reale 6-periodico i cui coefficienti a_2, b_2 valgano entrambi 2.

E' possibile che $\int_0^6 u^2(t) dt = 6$?

Sapendo che $\int_0^6 u^2(t) dt = 24$, determinare $\frac{1}{6} \int_0^6 u(t) \cos(\frac{4}{3}\pi t) dt$.

Soluzione 6.30. Se un segnale reale periodico di periodo T è sviluppabile in serie di Fourier, e si ha

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi/Tt) + b_k \sin(2k\pi/Tt),$$

allora vale l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Pertanto se esistono due coefficienti a_k, b_k tali che

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt < \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2),$$

l'uguaglianza di Parseval non può essere verificata. Nel nostro caso:

1. $\frac{1}{4} \int_0^4 u_1^2(t) dt = 1, \frac{1}{2}(a_5^2 + b_5^2) = 4$, quindi non è possibile.
2. $\frac{1}{3} \int_0^3 u_2^2(t) dt = 1, \frac{1}{2}(a_3^2 + b_3^2) = 4$, quindi non è possibile.
3. $\frac{1}{5} \int_0^5 u_3^2(t) dt = 1, \frac{1}{2}(a_7^2 + b_7^2) = 4$, quindi non è possibile.
4. $\frac{1}{6} \int_0^6 u_2^2(t) dt = 1, \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2) = 4$, quindi non è possibile.

Sempre dall'uguaglianza di Parseval, si deduce che se $\bar{k} > 0$ è un intero fissato, si ha:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt - \frac{1}{2}(a_{\bar{k}}^2 + b_{\bar{k}}^2) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq \bar{k}}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

In particolare, se esiste $\bar{k} > 0$ tale per cui $\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{2}(a_{\bar{k}}^2 + b_{\bar{k}}^2)$, allora si deve avere $a_k = b_k = 0$ per ogni $k \neq \bar{k}$, quindi, in particolare, per ogni $k \neq \bar{k}$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos(k2\pi/Tt) dt = 0.$$

Nel nostro caso, tale fenomeno si verifica per tutti e quattro i segnali considerati, pertanto i quattro integrali richiesti sono tutti nulli.

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Giuseppe Savaré)

Correzione Esercizi II prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda ⁶

Pavia, 28 Gennaio 2008

Esercizio 6.31. Si calcolino le trasformate di Fourier dei seguenti segnali:

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-8\pi it}}{1 + 25t^2} \right), & u_1(t) &:= e^{8t} \text{rect}(4t + 2), & u_2(t) &= \text{sign}(t)e^{-6|t|}. \\ v_0(t) &:= \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-2\pi it}}{1 + 9t^2} \right), & v_1(t) &:= e^{4t} \text{rect}(2t + 1), & v_2(t) &= \text{sign}(t)e^{-2|t|}. \\ w_0(t) &:= \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{6\pi it}}{1 + 16t^2} \right), & w_1(t) &:= e^{6t} \text{rect}(4t - 2), & w_2(t) &= \text{sign}(t)e^{-5|t|}. \\ z_0(t) &:= \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{4\pi it}}{1 + 4t^2} \right), & z_1(t) &:= e^{2t} \text{rect}(2t - 1), & z_2(t) &= \text{sign}(t)e^{-3|t|}. \end{aligned}$$

Soluzione 6.31. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, sia

$$u(t) := \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2\pi ait}}{1 + b^2 t^2} \right).$$

Si ha $u(t) = h'(t)$ con

$$h(t) = \frac{e^{2\pi ait}}{1 + b^2 t^2} = \frac{1}{b^2} \cdot e^{2\pi ait} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{b^2} \cdot e^{2\pi ait} \cdot g(t).$$

Dalle tavole si ricava $\hat{g}(f) = b\pi e^{-|2\pi f|/b}$, pertanto si ottiene $\hat{h}(f) = \frac{1}{b^2} \hat{g}(f - a)$, osservando che $h(t)$ è, a meno di una costante, una modulazione di $g(t)$. Dalla formula di trasformazione della derivata:

$$\hat{u}(f) = 2\pi i f \hat{h}(f) = \frac{2\pi^2 i f}{b} e^{-2\pi|(f-a)/b|}.$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(f) &= \frac{2\pi^2 i f}{5} e^{-2\pi|f+4|/5}, & \text{posto } a &= -4, b = 5. \\ \hat{v}_0(f) &= \frac{2\pi^2 i f}{3} e^{-2\pi|f+1|/3}, & \text{posto } a &= -1, b = 3. \\ \hat{w}_0(f) &= \frac{\pi^2 i f}{2} e^{-\pi|f-3|/2}, & \text{posto } a &= 3, b = 4. \\ \hat{z}_0(f) &= \pi^2 i f e^{-\pi|f-2|}, & \text{posto } a &= 2, b = 2. \end{aligned}$$

Dati $a, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, consideriamo ora $v(t) := e^{at} \text{rect}(kt + k/2)$ e poniamo $g(t) := \text{rect}(kt + k/2)$. Si ha che $g(t) = 1$ se e solo se $-1/2 \leq kt + k/2 \leq 1/2$, altrimenti è nulla. Ciò implica che $g(t) = 1$ se e solo se $-(1+k)/2k \leq t \leq (1-k)/2k$, altrimenti è nulla e dunque $g(t) = \chi_{(-(1+k)/2k, (1-k)/2k)}(t)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \hat{v}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} g(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-(1+k)/2k}^{(1-k)/2k} e^{(a-2\pi i f)t} dt = \left[\frac{e^{(a-2\pi i f)t}}{a - 2\pi i f} \right]_{t=-(1+k)/2k}^{t=(1-k)/2k} \\ &= \frac{e^{(a-2\pi i f)(1-k)/2k} - e^{-(a-2\pi i f)(1+k)/2k}}{a - 2\pi i f} \end{aligned}$$

⁶ Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22, email: antonio.marigonda@unipv.it

Ciò implica che:

$$\hat{u}_1(f) = \frac{e^{-3(4-\pi if)/4} - e^{-5(4-\pi if)/4}}{8 - 2\pi if}, \quad \text{posto } a = 8, k = 4.$$

$$\hat{v}_1(f) = \frac{e^{-(2-\pi if)/2} - e^{-3(2-\pi if)/2}}{4 - 2\pi if}, \quad \text{posto } a = 4, k = 2.$$

Dati $a, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, se consideriamo ora $v(t) := e^{at} \text{rect}(kt - k/2)$ e poniamo $g(t) := \text{rect}(kt - k/2)$. Si ha che $g(t) = 1$ se e solo se $-1/2 \leq kt - k/2 \leq 1/2$, altrimenti è nulla. Ciò implica che $g(t) = 1$ se e solo se $(k-1)/2k \leq t \leq (k+1)/2k$, altrimenti è nulla e dunque $g(t) = \chi_{(k-1)/2k, (k+1)/2k}(t)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \hat{v}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} g(t) e^{-2\pi ift} dt = \int_{(k-1)/2k}^{(k+1)/2k} e^{(a-2\pi if)t} dt = \left[\frac{e^{(a-2\pi if)t}}{a-2\pi if} \right]_{t=(k-1)/2k}^{t=(k+1)/2k} \\ &= \frac{e^{(a-2\pi if)(k+1)/2k} - e^{(a-2\pi if)(k-1)/2k}}{a-2\pi if} = \frac{e^{(a-2\pi if)/2}}{a-2\pi if} (e^{(a-2\pi if)/2k} - e^{-(a-2\pi if)/2k}) \\ &= \frac{e^{(a-2\pi if)/2}}{2(a-2\pi if)} \sinh((a-2\pi if)/2k). \end{aligned}$$

Ciò implica che:

$$\hat{w}_1(f) = \frac{e^{(3-\pi if)5/4} - e^{(3-\pi if)3/4}}{6 - 2\pi if}, \quad \text{posto } a = 6, k = 4.$$

$$\hat{z}_1(f) = \frac{e^{(1-\pi if)3/2} - e^{(1-\pi if)/2}}{2 - 2\pi if}, \quad \text{posto } a = 2, k = 2.$$

Dato $a > 0$, consideriamo ora

$$w(t) = \text{sign}(t)e^{-a|t|} = H(t)e^{-at} - H(-t)e^{-a(-t)}$$

Posto $g(t) = H(t)e^{-5t}$, si ha $w(t) = g(t) + g(-t)$ e dalle tavole si ricava

$$\hat{g}(f) = \frac{1}{a + 2\pi if} = \frac{a - 2\pi if}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Poiché la trasformata di $g(-t)$ è $\hat{g}(-f)$ per le formule di cambiamento di scala, si ottiene:

$$\hat{w}(f) = \frac{a - 2\pi if}{a^2 + 4\pi^2 f^2} - \frac{a + 2\pi if}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = -\frac{4\pi if}{a^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Nel nostro caso:

$$\hat{u}_2(f) = -\frac{4\pi if}{36 + 4\pi^2 f^2}, \quad \text{posto } a = 6.$$

$$\hat{v}_2(f) = -\frac{4\pi if}{4 + 4\pi^2 f^2}, \quad \text{posto } a = 2.$$

$$\hat{w}_2(f) = -\frac{4\pi if}{25 + 4\pi^2 f^2}, \quad \text{posto } a = 5.$$

$$\hat{z}_2(f) = -\frac{4\pi if}{9 + 4\pi^2 f^2}, \quad \text{posto } a = 3.$$

Esercizio 6.32.

1. Si consideri il segnale v lineare a tratti, continuo, nullo al di fuori dell'intervallo $[1, 10]$ il cui grafico è costituito dai segmenti congiungenti i punti $(1, 0)$, $(4, 9)$, $(7, 9)$, $(10, 0)$. Calcolare la trasformata di Laplace di v e dedurne la trasformata di Fourier.

- Si consideri il segnale v lineare a tratti, continuo, nullo al di fuori dell'intervallo $[1, 13]$ il cui grafico è costituito dai segmenti congiungenti i punti $(1, 0)$, $(5, -4)$, $(9, -4)$, $(13, 0)$. Calcolare la trasformata di Laplace di v e dedurne la trasformata di Fourier.
- Si consideri il segnale v lineare a tratti, continuo, nullo al di fuori dell'intervallo $[1, 7]$ il cui grafico è costituito dai segmenti congiungenti i punti $(1, 0)$, $(3, -2)$, $(5, -2)$, $(7, 0)$. Calcolare la trasformata di Laplace di v e dedurne la trasformata di Fourier.
- Si consideri il segnale v lineare a tratti, continuo, nullo al di fuori dell'intervallo $[1, 16]$ il cui grafico è costituito dai segmenti congiungenti i punti $(1, 0)$, $(6, 10)$, $(11, 10)$, $(16, 0)$. Calcolare la trasformata di Laplace di v e dedurne la trasformata di Fourier.

Soluzione 6.32. 1. Il segnale è continuo e regolare a tratti. Si ha $v'(t) = 3\chi_{(1,4)}(t) - 3\chi_{(7,10)}(t)$ per $t \notin \{1, 4, 7, 10\}$, e $v'(t) \in L^2(t)$ è l'unica primitiva causale di v . Quindi dalla formula:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v(s) &= \frac{\mathcal{L}v'(s)}{s} = \frac{1}{s} \left(\int_1^4 3e^{-st} dt - \int_7^{10} 3e^{-st} ds \right) = -\frac{3}{s^2} (e^{-4s} - e^{-s} - e^{-10s} + e^{-7s}) \\ &= -\frac{3e^{-s}}{s^2} (e^{-3s} - 1 - e^{-9s} + e^{-6s})\end{aligned}$$

Il segnale v è assolutamente integrabile e causale, quindi il dominio di $\mathcal{L}f$ contiene il semipiano immaginario e si ha:

$$\hat{v}(f) = \mathcal{L}v(2\pi if) = \frac{3e^{-(2\pi if)}}{(2\pi f)^2} (e^{-6\pi if} - 1 - e^{-18\pi if} + e^{-12\pi if})$$

- Il segnale è continuo e regolare a tratti. Si ha $v'(t) = -\chi_{(1,5)}(t) + \chi_{(9,13)}(t)$ per $t \notin \{1, 5, 9, 13\}$, e $v'(t) \in L^2(t)$ è l'unica primitiva causale di v . Quindi dalla formula:

$$\mathcal{L}v(s) = \frac{\mathcal{L}v'(s)}{s} = \frac{1}{s} \left(\int_1^5 -e^{-st} dt + \int_9^{13} e^{-st} ds \right) = \frac{1}{s^2} (e^{-5s} - e^{-s} - e^{-13s} + e^{-9s}).$$

Il segnale v è assolutamente integrabile e causale, quindi il dominio di $\mathcal{L}f$ contiene il semipiano immaginario e si ha:

$$\hat{v}(f) = \mathcal{L}v(2\pi if) = -\frac{e^{-(2\pi if)}}{(2\pi f)^2} (e^{-8\pi if} - 1 - e^{-24\pi if} + e^{-16\pi if})$$

- Il segnale è continuo e regolare a tratti. Si ha $v'(t) = -\chi_{(1,3)}(t) + \chi_{(5,7)}(t)$ per $t \notin \{1, 3, 5, 7\}$, e $v'(t) \in L^2(t)$ è l'unica primitiva causale di v . Quindi dalla formula:

$$\mathcal{L}v(s) = \frac{\mathcal{L}v'(s)}{s} = \frac{1}{s} \left(\int_1^3 -e^{-st} dt + \int_5^7 e^{-st} ds \right) = \frac{1}{s^2} (e^{-3s} - e^{-s} - e^{-7s} + e^{-5s}).$$

Il segnale v è assolutamente integrabile e causale, quindi il dominio di $\mathcal{L}f$ contiene il semipiano immaginario e si ha:

$$\hat{v}(f) = \mathcal{L}v(2\pi if) = -\frac{e^{-(2\pi if)}}{(2\pi f)^2} (e^{-4\pi if} - 1 - e^{-12\pi if} + e^{-8\pi if})$$

- Il segnale è continuo e regolare a tratti. Si ha $v'(t) = 2\chi_{(1,6)}(t) - 2\chi_{(11,16)}(t)$ per $t \notin \{1, 6, 11, 16\}$, e $v'(t) \in L^2(t)$ è l'unica primitiva causale di v . Quindi dalla formula:

$$\mathcal{L}v(s) = \frac{\mathcal{L}v'(s)}{s} = \frac{1}{s} \left(\int_1^6 2e^{-st} dt + \int_{11}^{16} 2e^{-st} ds \right) = -\frac{2}{s^2} (e^{-6s} - e^{-s} - e^{-16s} + e^{-11s}).$$

Il segnale v è assolutamente integrabile e causale, quindi il dominio di $\mathcal{L}f$ contiene il semipiano immaginario e si ha:

$$\hat{v}(f) = \mathcal{L}v(2\pi if) = -\frac{2e^{-(2\pi if)}}{(2\pi f)^2} (e^{-10\pi if} - 1 - e^{-30\pi if} + e^{-20\pi if})$$

Esercizio 6.33. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy in avanti (per $t > 0$):

1. $u^{(iv)}(t) - 4^2u(t) = 16$, $u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0$, $u''(0) = 1$.
2. $u^{(iv)}(t) - 25^2u(t) = 25$, $u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0$, $u''(0) = 1$.
3. $u^{(iv)}(t) - 81u(t) = 9$, $u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0$, $u''(0) = 1$.
4. $u^{(iv)}(t) - 16u(t) = 4$, $u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0$, $u''(0) = 1$.

Soluzione 6.33. Consideriamo l'equazione per $a, b \neq 0$:

$$u^{(iv)}(t) - a^2u(t) = b, \quad u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0, \quad u''(0) = 1.$$

Indicata con $\mathcal{U}(s)$ la trasformata di $u(t)$, si ha:

$$s^4\mathcal{U}(s) - su''(0) - a^2\mathcal{U}(s) = \frac{b}{s},$$

da cui si ottiene:

$$\mathcal{U}(s) = \frac{s^2 + b}{s(s^4 - a^2)} = \frac{s^2 + b}{s(s^2 - a)(s^2 + a)}, \quad u(t) = H(t) \sum \text{Res}(\mathcal{U}(s)e^{st}, s_k),$$

dove la sommatoria è estesa alle singolarità di \mathcal{U} . Osserviamo che tali singolarità sono date da $0, \pm\sqrt{|a|}$ se $a = b$, e da $0, \pm\sqrt{|a|}, \pm i\sqrt{|a|}$ se $a \neq b$. In tutti i casi si tratta di poli semplici, è possibile pertanto applicare la formula di Heaviside. Se $a = b$, dopo aver semplificato il fattore comune, si ha che la derivata del denominatore è $3s^2 - a$:

$$u(t) = H(t) \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}e^{-\sqrt{|a|}t} + \frac{1}{2a}e^{\sqrt{|a|}t} \right) = \frac{H(t)}{a} (\cosh(\sqrt{|a|}t) - 1).$$

Se $a \neq b$, si ha che la derivata del denominatore risulta $5s^4 - a^2$:

$$\begin{aligned} u(t) &= H(t) \left(-\frac{b}{a^2} + \frac{b-a}{4a^2}e^{-i\sqrt{|a|}t} + \frac{b-a}{4a^2}e^{i\sqrt{|a|}t} + \frac{b+a}{4a^2}e^{-\sqrt{|a|}t} + \frac{b+a}{4a^2}e^{\sqrt{|a|}t} \right) \\ &= \frac{H(t)}{a^2} \left(-b + \frac{b-a}{2} \cos(\sqrt{|a|}t) + \frac{b+a}{2} \cosh(\sqrt{|a|}t) \right). \end{aligned}$$

Nel nostro caso:

1. $u^{(iv)}(t) - 4^2u(t) = 16$, si ottiene ponendo $a = 4$, $b = 16$ e la soluzione è:

$$\begin{aligned} u(t) &= H(t) \left(-1 + \frac{3}{16}e^{-2it} + \frac{3}{16}e^{2it} + \frac{5}{16}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} \right) \\ &= \frac{H(t)}{8} (-8 + 3 \cos(2t) + 5 \cosh(2t)). \end{aligned}$$

2. $u^{(iv)}(t) - 25^2u(t) = 25$, si ottiene ponendo $a = b = 25$ e la soluzione è:

$$u(t) = H(t) \left(-\frac{1}{25} + \frac{1}{50}e^{-5t} + \frac{1}{50}e^{5t} \right) = \frac{H(t)}{25} (\cosh(5t) - 1).$$

3. $u^{(iv)}(t) - 81u(t) = 9$, si ottiene ponendo $a = b = 9$ e la soluzione è:

$$u(t) = H(t) \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{1}{18}e^{3t} \right) = \frac{H(t)}{9} (\cosh(3t) - 1).$$

4. $u^{(iv)}(t) - 16u(t) = 4$, si ottiene ponendo $a = b = 4$ e la soluzione è:

$$u(t) = H(t) \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t} \right) = \frac{H(t)}{4} (\cosh(2t) - 1).$$

Esercizio 6.34. Calcolare:

$$\begin{aligned} H(t) \left(\cos(4t) + \sin(4t) \right) * H(t)e^{-4t}, & \quad \frac{d}{dt} \left(\Delta(t-6) * \text{rect}(t) \right) \\ H(t) \left(\cos(5t) + \sin(5t) \right) * H(t)e^{-5t}, & \quad \frac{d}{dt} \left(\Delta(t-8) * \text{rect}(t) \right) \\ H(t) \left(\cos(3t) + \sin(3t) \right) * H(t)e^{-3t}, & \quad \frac{d}{dt} \left(\Delta(t-4) * \text{rect}(t) \right) \\ H(t) \left(\cos(2t) + \sin(2t) \right) * H(t)e^{-2t}, & \quad \frac{d}{dt} \left(\Delta(t-2) * \text{rect}(t) \right) \end{aligned}$$

Soluzione 6.34. Sia $a > 0$ e consideriamo:

$$\begin{aligned} H(t) \left(\cos(at) + \sin(at) \right) * H(t)e^{-at} &= H(t) \int_0^t (\cos(as) + \sin(as))e^{-a(t-s)} ds \\ &= e^{-at} H(t) \int_0^t (\cos(as) + \sin(as))e^{as} ds \\ &= \frac{e^{-at}}{a} H(t) \int_0^{at} (\cos(z) + \sin(z))e^z dz \\ &= H(t) \frac{e^{-at}}{a} [\sin(z)e^z]_0^{at} - \int_0^{at} \sin(z)e^z dz + \int_0^{at} \sin(z)e^z dz \\ &= \frac{H(t)}{a} \sin(at), \end{aligned}$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} H(t) \left(\cos(4t) + \sin(4t) \right) * H(t)e^{-4t} &= \frac{H(t)}{4} \sin(4t) \\ H(t) \left(\cos(5t) + \sin(5t) \right) * H(t)e^{-5t} &= \frac{H(t)}{5} \sin(5t) \\ H(t) \left(\cos(3t) + \sin(3t) \right) * H(t)e^{-3t} &= \frac{H(t)}{3} \sin(3t) \\ H(t) \left(\cos(2t) + \sin(2t) \right) * H(t)e^{-2t} &= \frac{H(t)}{2} \sin(2t). \end{aligned}$$

Sia $a > 0$ e consideriamo:

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{d}{dt} \left(\Delta(t-a) * \text{rect}(t) \right) = \left(\frac{d}{dt} \Delta(t-a) \right) * \text{rect}(t) \\ &= (\chi_{[(a-1), a]}(t) - \chi_{[a, a+1]}(t)) * \text{rect}(t) \\ &= \text{rect}(t - (a - 1/2)) * \text{rect}(t) - \text{rect}(t - (a + 1/2)) * \text{rect}(t) \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\hat{g}(f) = e^{-2\pi i(a-1/2)f} \text{sinc}^2(t) - e^{-2\pi i(a+1/2)f} \text{sinc}^2(t),$$

e antitrasformando:

$$g(t) = \Delta(t - (a - 1/2)) - \Delta(t - (a + 1/2)),$$

nel nostro caso si ha $a = 2, 4, 6, 8$ si ottiene quindi.

Esercizio 6.35. Posto $u_1(t) = u_2(t) = e^{-\pi t^2} * e^{-4\pi t^2}$ e $u_3(t) = u_4(t) = e^{-\pi t^2} * e^{-9\pi t^2}$, calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) e^{8\pi i t} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t) e^{4\pi i t} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_3(t) e^{6\pi i t} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_4(t) e^{12\pi i t} dt.$$

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(16 + t^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(4 + t^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(9 + t^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(25 + t^2)^2}.$$

Soluzione 6.35. Poniamo $g(t) = e^{-\pi t^2}$, $\hat{g} = g$ e consideriamo per $a > 0$ il segnale $u(t) = g(t) * g(at)$ e calcoliamo:

$$\hat{u}(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-2b\pi it} dt = \hat{g}(b) \cdot \frac{1}{a}\hat{g}(b/a) = \frac{1}{a}g(b) \cdot g(b/a)$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} a = 2, b = -4 & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{8\pi it} dt = \frac{1}{2}e^{-(16+4)\pi} = \frac{1}{2}e^{-20\pi}. \\ a = 2, b = -2 & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{4\pi it} dt = \frac{1}{2}e^{-(4+1)\pi} = \frac{1}{2}e^{-5\pi}. \\ a = 3, b = -3 & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{6\pi it} dt = \frac{1}{3}e^{-(9+1)\pi} = \frac{1}{3}e^{-10\pi}. \\ a = 3, b = -6 & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)e^{12\pi it} dt = \frac{1}{3}e^{-(36+4)\pi} = \frac{1}{3}e^{-40\pi}. \end{aligned}$$

Dato $a > 0$, per la formula di Plancherel si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{a}e^{-a|2\pi f|}\right)^2 df = 2\frac{\pi^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-4\pi a f} df = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(16 + t^2)^2} = \frac{\pi}{128}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(4 + t^2)^2} = \frac{\pi}{16}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(9 + t^2)^2} = \frac{\pi}{54}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(25 + t^2)^2} = \frac{\pi}{250}.$$

Esercizio 6.36. Calcolare il seguente limite:

$$\ell := \lim_{f \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi ft)^2 \operatorname{sinc}^2(t) dt.$$

Soluzione 6.36. Si ha:

$$\begin{aligned} \ell & := \lim_{f \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{2\pi itf} - e^{-2\pi itf}}{2i}\right)^2 \operatorname{sinc}^2(t) dt \\ & = -\frac{1}{4} \lim_{f \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{4\pi itf} + e^{-4\pi itf} - 2) \operatorname{sinc}^2(t) dt \\ & = -\frac{1}{4} \lim_{f \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{4\pi itf} \operatorname{sinc}^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi itf} \operatorname{sinc}^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t) dt \\ & = -\frac{1}{4} \lim_{f \rightarrow +\infty} \widehat{\operatorname{sinc}^2}(-2f) + \widehat{\operatorname{sinc}^2}(2f) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t) dt \end{aligned}$$

Si ha che $\operatorname{sinc}^2 \in L^1(\mathbb{R})$, per cui al limite i primi due addendi si annullano. Applicando poi Plancherel:

$$\ell = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}^2(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Proff. Ugo Gianazza - Giuseppe Savaré)

Promemoria

Dott. Antonio Marigonda ⁷

Pavia, 16 Novembre 2007

$$e^z = \cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Funzioni goniometriche	Funzioni iperboliche
$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz$ $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \sinh iz$ $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -i \tanh(iz)$ $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \coth(iz)$	$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz$ $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz$ $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = -i \tan(iz)$ $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = i \cot(iz)$
$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$	$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ $\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$ $\cot(z_1 \pm z_2) = \frac{\cot z_1 \cot z_2 \mp 1}{\cot z_2 \pm \cot z_1}$	$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$ $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$ $\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$ $\coth(z_1 \pm z_2) = \frac{\coth z_1 \coth z_2 \pm 1}{\coth z_2 \pm \coth z_1}$

⁷ Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

Funzioni goniometriche	Funzioni iperboliche
$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2 \cos^2 z - 1 = 1 - 2 \sin^2 z$ $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$ $\tan(2z) = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2(z)}$ $\cot(2z) = \frac{\cot^2(z) - 1}{2 \cot z}$	$\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z = 2 \cosh^2 z - 1 = 1 + 2 \sinh^2 z$ $\sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z$ $\tanh(2z) = \frac{2 \tanh z}{1 + \tanh^2(z)}$ $\coth(2z) = \frac{\coth^2(z) + 1}{2 \coth z}$
$\cos\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos z}{2}}$ $\sin\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{2}}$ $\tan\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}} = \frac{\sin z}{1 + \cos z} = \frac{1 - \cos z}{\sin z}$ $\cot\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos z}{1 - \cos z}} = \frac{1 + \cos z}{\sin z} = \frac{\sin z}{1 - \cos z}$	$\cosh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cosh z}{2}}$ $\sinh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{-\frac{1 - \cosh z}{2}}$ $\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{-\frac{1 - \cosh z}{1 + \cosh z}} = \frac{\sinh z}{1 + \cosh z} = -\frac{1 - \cosh z}{\sinh z}$ $\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \pm \sqrt{-\frac{1 + \cosh z}{1 - \cosh z}} = \frac{1 + \cosh z}{\sinh z} = -\frac{\sinh z}{1 - \cosh z}$
$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cos\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cos\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\tan z_1 \pm \tan z_2 = \frac{\sin(z_1 \pm z_2)}{\cos z_1 \cos z_2}$ $\cot z_1 \pm \cot z_2 = \frac{\sin(z_2 \pm z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}$	$\cosh z_1 + \cosh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\cosh z_1 - \cosh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\sinh z_1 - \sinh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$ $\tanh z_1 \pm \tanh z_2 = \frac{\sinh(z_1 \pm z_2)}{\cosh z_1 \cosh z_2}$ $\coth z_1 \pm \coth z_2 = \frac{\sinh(z_2 \pm z_1)}{\sinh z_1 \sinh z_2}$
$2 \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 + z_2) - \sin(z_1 - z_2)$ $2 \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)$ $2 \cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)$	$2 \cosh z_1 \sinh z_2 = \sinh(z_1 + z_2) - \sinh(z_1 - z_2)$ $2 \sinh z_1 \sinh z_2 = \cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)$ $2 \cosh z_1 \cosh z_2 = \cosh(z_1 - z_2) + \cosh(z_1 + z_2)$

Funzioni goniometriche		Funzioni iperboliche	
$\cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2},$	$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\cosh z = \frac{1+t^2}{1-t^2},$	$t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\sin z = \frac{2t}{1+t^2},$	$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\sinh z = \frac{2t}{1-t^2},$	$t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\tan z = \frac{2t}{1-t^2},$	$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\tanh z = \frac{2t}{1+t^2},$	$t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\cot z = \frac{1-t^2}{2t},$	$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\cot z = \frac{1+t^2}{2t},$	$t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$