7. Trasformata di Laplace (8 gennaio 2008)

Pierre Simond de Laplace (1749-1827)

Trasformata di Fourier e segnali causali

In questa lezione ci occuperemo principalemente di segnali *causali*:

Definizione 7.1 (Segnali causali) *Un segnale* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *si dice* causale *se* $u(t) \equiv 0$ *per* $t < 0$.

Supponiamo che u sia un segnale limitato e assolutamente integrabile, e sia $\hat{u}(f)$ la sua trasformata di Fourier.

Problema 7.2 *È possible capire dalle proprietà di* $\hat{u}$ *se il segnale di partenza* u *è causale?*

Esempi

Per $\alpha \in (0, +\infty)$ i segnali

$$u_\alpha(t) := H(t)e^{-\alpha t}, \quad v_\alpha := u_\alpha(-t) = H(-t)e^{\alpha t}, \quad w_\alpha(t) = u_\alpha(t) + v_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$$

forniscono degli esempi istruttivi: sappiamo infatti che

$$\hat{u}_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha + 2\pi i f}, \quad \hat{v}_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha - 2\pi i f}, \quad \hat{w}_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Osserviamo che ciascuna di queste funzioni (in quanto razionale) ha senso anche per frequenze f *complesse*, può cioè essere estesa in modo naturale al campo complesso e questa estensione risulta inoltre *analitica*, cioè derivabile in senso complesso.

Esse presentano però delle singolarità:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi} i \in \{f \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} f > 0\} &\quad \text{per } \hat{u}_\alpha; \\ -\frac{\alpha}{2\pi} i \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\} &\quad \text{per } \hat{v}_\alpha; \\ \pm \frac{\alpha}{2\pi} i &\quad \text{per } \hat{w}_\alpha. \end{aligned}$$

Quando α tende a 0 queste singolarità si avvicinano sempre più all'asse reale; volendo estendere quindi le trasformate di Fourier al piano complesso *senza* dover incontrare singolarità, siamo costretti a "muoverci" nella direzione del semipiano $\{\operatorname{Im} f < 0\}$ per U_α (trasformata di un segnale causale) mentre per V_α possiamo andare solo nella direzione del semipiano $\{\operatorname{Im} f > 0\}$. Nel caso di W_α si incontrano singolarità in entrambe le direzioni.

La proprietà messa in luce dal precedente esempio è di carattere generale e va sotto il nome di Teorema di Paley-Wiener; eccone una versione semplificata:

Teorema 7.3 (Paley-Wiener) *Sia $\hat{u}(f)$ la trasformata di Fourier di un segnale limitato u assolutamente integrabile. u è causale se e solo se $U(f)$ ammette una estensione* olomorfa e limitata *al semipiano complesso* $\{\operatorname{Im} f < 0\}$.

Noi non diamo la dimostrazione (non facile) di questo teorema, ma possiamo cercare di capire meglio perché nel caso dei segnali casuali le "frequenze complesse" con parte immaginaria negativa hanno un ruolo speciale. Il motivo, molto semplice, è legato alla formula che esprime il modulo di un esponenziale complesso:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{o equivalentemente} \quad |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}.$$

Se scriviamo la formula della trasformata di Fourier

$$\hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-2\pi i f t}\, dt \tag{7.1}$$

e vogliamo stimare il modulo dell'integrando per qualunque $f \in \mathbb{C}$ ci accorgiamo che

$$|u(t)e^{-2\pi i f t}| = |u(t)|\, |e^{-2\pi i f t}| = |u(t)|\, e^{2\pi (\operatorname{Im} f) t}$$

Quando la parte immaginaria di f è zero (il caso usuale della trasformata di Fourier: le frequenze sono reali!), il modulo dell'esponenziale è sempre 1 e quindi l'esistenza dell'integrale in (7.1) è ricondotta all'assoluta integrabilità di u.

Se però vogliamo considerare anche frequenze *complesse* (significative solo da un punto di vista matematico...) allora l'esponenziale modifica considerevolmente l'integrabilità di u poichè se $\operatorname{Im} f > 0$ esso diverge a $+\infty$ per $t \to +\infty$ mentre se $\operatorname{Im} f < 0$ l'esponenziale diverge per $t \to -\infty$. Ma se il segnale u è *causale* esso "cancella" l'esponenziale per i tempi negativi e quindi possiamo scrivere

$$\hat{u}(f) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-2\pi i f t}\, dt, \quad |u(t)e^{-2\pi i f t}| = |u(t)|\, e^{2\pi (\operatorname{Im} f) t} \le |u(t)| \quad \text{per } t \ge 0.$$

Dunque $\hat{u}(f)$ è ben definita anche se $\operatorname{Im} f < 0$, vale la solita limitazione

$$|\hat{u}(f)| \le \int_0^{+\infty} |u(t)|\, dt \quad \forall f \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} f \le 0,$$

e inoltre si potrebbe mostrare che $\hat{u}(f)$ è derivabile in senso complesso rispetto a f, dunque analitica e di classe C^∞.

Un passo verso la trasformata di Laplace

Una volta estesa $\hat{u}(f)$ al campo complesso, diminuisce il ruolo privilegiato della frequenza (reale) f mentre sembrerebbe più naturale semplificare la formula che definisce la trasformata di Fourier introducendo la nuova variabile complessa

$$\boxed{s := 2\pi i f} \tag{7.2}$$

Questa semplice sostituzione, che nel piano complesso è (a meno del fattore 2π) una *rotazione* in senso antiorario di un angolo retto, trasforma il semipiano $\{\operatorname{Im} f \leq 0\}$ nel semipiano $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ e porta naturalmente alla definizione di trasformata di Laplace:

Definizione 7.4 (Trasformata di Laplace) *Sia u un segnale* causale*; la* trasformata di Laplace $\mathcal{U}(s) = \mathscr{L}[u](s)$ *di u è definita dall'integrale*

$$\mathcal{U}(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt \tag{7.3}$$

per tutte i valori di $s \in \mathbb{C}$ per cui la funzione $t \mapsto u(t)e^{-st}$ è assolutamente integrabile. Chiamiamo dominio $D(\mathcal{U})$ *di $\mathcal{U}$ l'insieme di tali valori e diremo che un segnale u è* $\mathscr{L}$-trasformabile *quando u* **è causale e il dominio $D(\mathcal{U})$ di $\mathcal{U}$ contiene almeno un punto**.
Useremo spesso la notazione (molto imprecisa ma comoda)

$$u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{U}(s) \quad \textit{oppure} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \tag{7.4}$$

per indicare la trasformata di Laplace e

$$\mathcal{U}(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} u(t) \quad \textit{oppure} \quad \mathcal{U}(s) \sqsubset u(t) \tag{7.5}$$

per indicare la sua inversa.

Precisazione — ***Segnali $\mathscr{L}$-trasformabili.*** Come vedremo, quando u è $\mathscr{L}$-trasformabile il dominio di $\mathcal{U}$ contiene automaticamente tutto un semipiano destro nel piano complesso del tipo $\operatorname{Re} s > \lambda$.

Attenzione! — ***Il dominio dipende da u.*** A differenza della trasformata di Fourier, il dominio di una trasformata di Laplace $\mathcal{U}$ *dipende* dal segnale originale u. A segnali diversi corrispondono trasformate definite in semipiani generalmente differenti.

Osservazione — Benché modellata su quanto detto all'inizio di questa lezione, la definizione che abbiamo appena dato è più generale, in quanto *non* abbiamo supposto che u sia assolutamente integrabile; vedremo anzi che uno dei punti a favore della trasformata di Laplace è quello di trattare anche segnali non limitati, addirittura a crescita esponenziale.

Possiamo però già stabilire una relazione fondamentale

Osservazione 7.5 (Laplace e Fourier) *Se u è un* ***segnale casuale e assolutamente integrabile****, allora il dominio della sua trasformata di Laplace contiene il semipiano $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ ed in particolare l'asse immaginario. Lungo quest'ultimo, la trasformata di Laplace coincide con la trasformata di Fourier di u mediante la relazione*

$$\mathcal{U}(2\pi i f) = \hat{u}(f). \tag{7.6}$$

Come è fatto il dominio di $\mathcal{U}$? Dalle stime precedenti si dimostra facilmente il seguente risultato:

Lemma 7.6 *Se $D(\mathcal{U})$ contiene un punto $s_0 \in \mathbb{C}$ allora contiene tutto il semipiano (chiuso) $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0\}$ a destra di s_0.*

Come conseguenza si ha:

Definizione 7.7 (Dominio della trasformata di Laplace) *Se u è Laplace-trasformabile (cioè se $D(\mathcal{U})$ contiene almeno un punto...) allora esiste un unico numero reale $\lambda = \lambda_u$ dipendente da u e chiamato* ascissa di convergenza della trasformata di Laplace *o* ascissa di assoluta trasformabilità *tale che*

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda\} \subset D(\mathcal{U}), \quad \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < \lambda\} \cap D(\mathcal{U}) = \varnothing. \tag{7.7}$$

In altre parole: il semipiano destro (aperto) $\operatorname{Re} s > \lambda$ è il più grande semipiano destro (aperto) contenuto in $D(\mathcal{U})$ e non vi sono punti di $D(\mathcal{U})$ alla sinistra della retta $\operatorname{Re} s = \lambda$. Invece non si può concludere nulla a priori sul comportamento di $\mathcal{U}$ lungo questa retta.

Due criteri sono piuttosto utili in pratica:

Criterio 7.8 (Segnali a crescita esponenziale) *Un segnale causale u si dice a* crescita esponenziale *se esistono costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|u(t)| \leq Ae^{Bt} \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{7.8}$$

Se u è a crescita esponenziale, allora è $\mathscr{L}$-trasformabile e $\lambda_u \leq B$.

Nota Se u è localmente limitato, basta controllare la (7.8) per $t \uparrow +\infty$.

Criterio 7.9 (Ascissa di convergenza e fattori polinomiali) *Se u è $\mathscr{L}$-trasformabile e P è un polinomio (o una funzione a crescita polinomiale), anche $P\,u$ è $\mathscr{L}$-trasformabile e ha la medesima ascissa di convergenza.*

Esempi

$$H(t) \sqsupset \frac{1}{s} \qquad H(t)t^k \sqsupset \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$H(t)e^{\alpha t} \sqsupset \frac{1}{s-\alpha} \qquad H(t)t^k e^{\alpha t} \sqsupset \frac{k!}{(s-\alpha)^{k+1}}$$

$$H(t)\cos\omega t \sqsupset \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad H(t)\sin\omega t \sqsupset \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$H(t)\cosh\omega t \sqsupset \frac{s}{s^2-\omega^2} \qquad H(t)\sinh\omega t \sqsupset \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$$

Abbiamo visto che se la retta immaginaria fa parte del dominio di $\mathcal{U}$, allora $\mathcal{U}(2\pi i f) = U(f)$.

Problema 7.10 *È possibile stabilire un legame tra trasformata di Laplace e Fourier anche se $D(\mathcal{U})$ non contiene l'asse immaginario?*

L'idea è molto semplice: basta scrivere

$$s = r + 2\pi i f, \quad r = \operatorname{Re} s, \quad f = \frac{\operatorname{Im} s}{2\pi}. \tag{7.9}$$

Si verifica subito che

$$\boxed{u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t)e^{-rt} \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathcal{U}(r + 2\pi i f)} \tag{7.10}$$

In altre parole, lungo l'asse verticale di ascissa r la trasformata di Laplace (a meno del solito fattore 2π) coincide con la trasformata di Fourier del segnale (smorzato, se $r > 0$) $u(t)e^{-rt}$.

Proprietà fondamentali

Proprietà qualitative e formula di inversione

Teorema 7.11 (Comportamento asintotico) *Se u è un segnale $\mathscr{L}$-trasformabile allora $\mathcal{U}$ è analitica nel semipiano* $\operatorname{Re} s > \lambda$, *limitata "lontano" dalla retta* $\operatorname{Re} s = \lambda$ *e*

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \mathcal{U}(s) = 0} \tag{7.11}$$

Inoltre se esiste il limite $u(0+) = \lim_{t\downarrow 0} u(t)$ allora

$$u(0+) = \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{U}(s) \tag{7.12}$$

mentre se esiste il limite $u(+\infty) = \lim_{t\uparrow+\infty} u(t)$ allora

$$u(+\infty) = \lim_{s\to 0+} s\mathcal{U}(s). \tag{7.13}$$

Commento

Let formule (7.12) ed (7.13) vanno anche sotto il nome di *formula del valore iniziale* e *formula del valore finale*, rispettivamente. Sono possibili anche varianti più complicate, ad esempio

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{u(t)}{t^k} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^{k+1}}{k!}\mathcal{U}(s), \qquad \lim_{t\uparrow+\infty} \frac{u(t)}{t^k} = \lim_{s\to 0+} \frac{s^{k+1}}{k!}\mathcal{U}(s) \tag{7.14}$$

sempre nelle ipotesi che il limite nel membro di destra dell'identità esista.

Sfruttando il legame (7.10) con la trasformata di Fourier si ottiene la *Formula di inversione di Riemann:*

Teorema 7.12 (Formula di inversione di Riemann) *Sia u un segnale regolare a tratti e $\mathscr{L}$-trasformabile, $\mathcal{U}(s)$ la trasformata di Laplace di u definita nel sempiano* $\operatorname{Re} s > \lambda$. *Per ogni $r > \lambda$ si ha*

$$\frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \mathcal{U}(s)e^{st}\,ds. \tag{7.15}$$

Corollario 7.13 (Iniettività della trasformata di Laplace) *Se due segnali hanno la medesima trasformata di Laplace allora coincidono.*

Alcuni commenti:

Commento

Il valor principale in (7.15) significa al solito

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{Y\uparrow+\infty}\int_{r-iY}^{r+iY} \mathcal{U}(s)e^{st}\,ds. \tag{7.16}$$

Quest'ultimo integrale va inteso in senso complesso: introdotta la parametrizzazione $s = r + 2\pi i f$, $f \in [-Y/2\pi, Y/2\pi]$, si ha $ds = 2\pi i$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r-iY}^{r+iY} \mathcal{U}(s)e^{st}\,ds = \int_{-Y/2\pi}^{Y/2\pi} \mathcal{U}(r+2\pi i f)e^{rt+2\pi i f t}\,df = e^{rt}\int_{-Y/2\pi}^{Y/2\pi} \mathcal{U}(r+2\pi i f)e^{2\pi i f t}\,df \tag{7.17}$$

che è appunto la formula di inversione di Fourier.

L'aspetto interessante è che per valutare l'integrale di (7.15) si possono usare tutte le tecniche dell'analisi complessa, in particolare la Formula dei residui e il Lemma di Jordan.

Commento

Un aspetto abbastanza soprendente della formula (7.15) è che l'integrale *non* dipende da r: questo è conseguenza del Teorema di Cauchy, che stabilisce l'invarianza degli integrali complessi rispetto a deformazioni del cammino che non attraversino singolarità dell'integrando.

Commento Un altro aspetto non ovvio è che se si calcolasse l'integrale per $t < 0$ si otterrebbe comunque 0, essendo u causale. Anche questo fatto è codificato nell'analiticità di $\mathcal{U}$, ed è una conseguenza del teorema di Paley-Wiener.

Attenzione! ***Valore di*** u ***per*** $t = 0$. Quando si calcola la formula (7.15) per $t = 0$ bisogna sempre tener conto che $u(t_-) = 0$, anche se u è continua a destra.

Vediamo un esempio *molto importante* di applicazione della formula di inversione di Riemann e del Lemma di Jordan.

Esempio 7.14 (Formula di Heaviside) *Sia*

$$\mathcal{U}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{una funzione razionale propria}$$

(cioè il grado del polinomio P a numeratore è minore *del grado del polinomio Q a denominatore) e siano*

$$s_1, \cdots, s_n \quad \text{le singolarità di } \mathcal{U}$$

(che sono in particolare zeri di Q*). Allora $\mathcal{U}$ è la trasformata di Laplace del segnale u definito da*

$$\mathcal{U}(s) \sqsubset u(t) = H(t) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\Big(\mathcal{U}(s)e^{st}; s = s_k\Big). \tag{7.18}$$

In particolare, se $s_1, \cdots, s_n$ sono radici semplici di Q *(cioè $Q(s_k) = 0$, $Q'(s_k) \neq 0$) allora vale la* formula di Heaviside

$$\mathcal{U}(s) \sqsubset u(t) = H(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}. \tag{7.19}$$

Proprietà elementari

La trasformata di Laplace eredita solo alcune delle proprietà elementari della trasformata di Fourier: *non hanno più senso* il principio di dualità (il dominio della trasformata è completamente diverso dal dominio di u, la trasformata inversa non è più collegata alla trasformata coniugata), cambiamenti di scala con fattore negativo (distruggono la causalità del segnale u), parità e disparità (sempre perché u è causale), anticipi (cioè ritardi negativi). Si tenga poi conto che $\mathcal{U}(0)$ non'e sempre definito.

Linearità

$$\text{se} \quad u_i(t) \sqsupset \mathcal{U}_i(s) \quad \text{allora} \quad \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \sqsupset \alpha_1 \mathcal{U}_1(s) + \alpha_2 \mathcal{U}_2(s).$$

Segnali reali

$$\text{Se } u \text{ è reale allora } \mathcal{U} \text{ è Hermitiano, cioè} \quad \mathcal{U}(\bar{s}) = \overline{\mathcal{U}(s)}. \tag{7.20}$$

Significato di $\mathcal{U}(0)$

$$\mathcal{U}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt \quad \text{è semplicemente l'integrale di } u, \text{ quando è definito.} \tag{7.21}$$

Cambiamenti di scala Se $\lambda > 0$ è un fattore di cambiamento di scala allora

$$\text{se} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(f) \quad \text{allora} \quad u(t/\lambda) \sqsupset \lambda \mathcal{U}(\lambda f) \tag{7.22}$$

Ritardi Dato un segnale u e un ritardo *positivo* $\tau > 0$, ricordiamo che $\mathsf{S}_\tau[u]$ è il corrispondente segnale *ritardato di* τ

$$\mathsf{S}_\tau[u](t) := u(t-\tau).$$

Si ha

$$\text{se} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(f) \quad \text{allora} \quad u(t-\tau) \sqsupset e^{-\tau s}\mathcal{U}(s). \tag{7.23}$$

Attenzione! ***Occorre pensare il segnale u definito su tutto $\mathbb{R}$.*** Poiché u è causale, nella definizione di ritardo è implicito che $\mathsf{S}_\tau[u](t) \equiv 0$ se $t < \tau$.

Modulazione Modulare un segnale u significa moltiplicarlo per un segnale esponenziale del tipo $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. A differenza della trasformata di Fourier, α può essere arbitrario. Si ha

$$\text{se} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \text{allora} \quad e^{\alpha t} u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s-\alpha). \tag{7.24}$$

Da questa formula si deduce facilmente che

$$\cos(\omega t) u(t) \sqsupset \frac{1}{2}\Big[\mathcal{U}(s-i\omega) + \mathcal{U}(s+i\omega)\Big],$$
$$\sin(\omega t) u(t) \sqsupset \frac{1}{2i}\Big[\mathcal{U}(s-i\omega) - \mathcal{U}(s+i\omega)\Big].$$

Proprietà significative

Derivazione Sia u è $\mathscr{L}$-trasformabile, *regolare a tratti e continua* (salvo al più in $t = 0$: indichiamo con $u(0+)$ il valore di u da destra);

$$\boxed{\text{se} \quad u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \text{allora} \quad \frac{d}{dt}u(t) \sqsupset s\mathcal{U}(s) - u(0+).} \tag{7.25}$$

In particolare, se u è continua anche in 0 si ha

$$u(0+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(t) \sqsupset s\mathcal{U}(s). \tag{7.26}$$

Moltiplicazione per t Se u è $\mathscr{L}$-trasformabile allora

$$\boxed{u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad t\,u(t) \sqsupset -\frac{d}{ds}\mathcal{U}(s).} \tag{7.27}$$

Da queste due formule se ne ricavano altre:

Primitiva causale Se u è causale vi è un'unica primitiva di u che è ancora causale e si indica con $H * u$,

$$H * u(t) := H(t) \int_0^t u(r)\,dr.$$

Poiché $H * u(0+) = 0$, grazie alla (7.25) si ha che

$$u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad H * u \sqsupset \frac{\mathcal{U}(s)}{s} \tag{7.28}$$

che fornisce quindi la trasformata della ***primitiva causale*** di u.

Divisione per t Analogamente, se u e $u(t)/t$ sono $\mathscr{L}$-trasformabili (quindi in particolare deve essere $u(0+) = 0$) allora

$$u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{u(t)}{t} \sqsupset \int_s^{+\infty} \mathcal{U}(r)\,dr. \tag{7.29}$$

Segnali periodici Se u è della forma $H(t)v(t)$ con v T-periodico, la sua trasformata si può calcolare con un integrazione su un solo periodo:

$$u(t) \sqsupset \frac{\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-Ts}}. \tag{7.30}$$

Convoluzione Se u, v sono $\mathscr{L}$-trasformabili allora $u * v$ è $\mathscr{L}$-trasformabile e

$$\boxed{u(t) \sqsupset \mathcal{U}(s),\ v(t) \sqsupset \mathcal{V}(s) \quad \Rightarrow \quad u * v \sqsupset \mathcal{U}(s)\mathcal{V}(s).} \tag{7.31}$$

Equazioni differenziali, problemi ai valori iniziali

La formula (7.25) è particolarmente utile nella soluzione dei le equazioni differenziali a coefficienti costanti. Vediamo innanzitutto come estendere la (7.25) alle derivate di ordine superiore: se u è un segnale causale che è regolare nell'intervallo $[0, +\infty)$ (quindi è derivabile a destra nel punto 0) possiamo indicare con $u', u'', u''', \dots, u^{(n)}$ i nuovi segnali che si ottengono derivando u a destra e a sinistra di 0 (in 0 u non sarà generalmente neppure continuo); questi segnali saranno ovviamente ancora causali. Indicheremo poi con

$$u_0 := u(0+), \quad u_1 := u'(0_+), \quad u_2 := u''(0_+), \quad u_3 := u'''(0_+), \quad \cdots, u_n := u^{(n)}(0_+)$$

i limiti *da destra* delle derivate successive di u nel punto 0 (a sinistra di 0 u è nullo, quindi i limiti sinistri di tutte le derivate sono nulli). Applicando ripetutamente la (7.25) si ottiene

$$\begin{aligned}
u &\sqsupset \mathcal{U}(s) \\
u' &\sqsupset s\mathcal{U}(s) - u_0 \\
u'' &\sqsupset s(s\mathcal{U}(s) - u_0) - u_1 && = s^2\mathcal{U}(s) - su_0 - u_1 \\
u''' &\sqsupset s(s^2\mathcal{U}(s) - su_0 - u_1) && = s^3\mathcal{U}(s) - s^2u_0 - su_1 - u_2 \\
u^{(n)} &\sqsupset && = s^n\mathcal{U}(s) - s^{n-1}u_0 - s^{n-2}u_1 - \cdots - su_{n-2} - u_{n-1}
\end{aligned}$$

Supponiamo di voler risolvere allora l'equazione differenziale *lineare, a coefficienti costanti* di *ordine n*

$$a_n u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+a_{n-2}u^{(n-2)}(t)+\cdots+a_2u''(t)+a_1u'(t)+a_0u(t) = f(t) \qquad t\in\mathbb{R} \quad (7.32)$$

dove f è una funzione assegnata, così come i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$, con $a_n \neq 0$. Invece di risolvere il problema su tutta la retta reale, imponiamo l'equazione solo per $t > 0$ e pensiamo che u e f siano segnali causali. Possiamo allora applicare la trasformata di Laplace a ciascun membro dell'equazione e sfruttare le regole di trasformazione appena viste. Consideriamo il caso $n = 3$, ponendo $f \sqsupset \mathcal{F}(s)$

$$a_3(s^3\mathcal{U}(s) - u_0s^2 - u_1s - u_2) + a_2(s^2\mathcal{U}(s) - u_0s - u_1) + a_1(s\mathcal{U}(s) - u_0) + \mathcal{U}(s) = \mathcal{F}(s)$$

da cui, mettendo in evidenza $\mathcal{U}(s)$

$$(a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)\mathcal{U}(s) = \mathcal{F}(s) + s^2(a_3u_0) + s(a_3u_1 + a_2u_0) + (a_3u_2 + a_2u_1 + a_1u_0)$$

e quindi un'equazione della forma

$$Q(s)\mathcal{U}(s) = \mathcal{F}(s) + P(s) \qquad (7.33)$$

che vale anche per le equazioni di ordine superiore. In generale

$$Q(s) := a_ns^n+a^{n-1}s^{(n-1)}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0 \quad \text{è il } \textbf{polinomio caratteristico dell'equazione} \qquad (7.34)$$

e

$$P(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2s^2 + b_1s + b_0, \quad b_m := \sum_{k=0}^{n-m-1} a_{n-k}u_k \qquad (7.35)$$

è un polinomio formato con i valori $u_0, u_1, u_2, \cdots$ di u e delle sue derivate destre in 0. Dalla (7.33) si ottiene

$$\mathcal{U}(s) = \frac{\mathcal{F}(s) + P(s)}{Q(s)} \qquad (7.36)$$

da cui si può sperare di determinare u risolvendo un problema di inversione, *se ovviamente si conoscono le cosiddette*

$$\textbf{condizioni iniziali (o di Cauchy):} \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \cdots, \ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}. \qquad (7.37)$$

Osserviamo che per una equazione di ordine n (dove quindi la derivata di ordine massimo che compare è di ordine n) occorrono esattamente n condizioni iniziali (dalla u_0 alla u_{n-1}, imposte quindi su tutte le derivate fino alla $n-1$-esima) per risolvere univocamente il problema. Altrimenti si può comunque esprimere la soluzione in funzione di un certo numero di parametri che rimangono indeterminati.

Ci sono due casi particolari molto importanti:

1. Quando $f \equiv 0$ e $u_0 = u_1 = \cdots = u_{n-2} = 0$; in tal caso $P(s) = a_nu_{n-1}$ è una costante e l'equazione diventa

$$\mathcal{U}(s) = \frac{a_nu_{n-1}}{Q(s)} = a_nu_{n-1}\frac{1}{Q(s)}. \qquad (7.38)$$

Indicando con $q(t)$ la cosiddetta **soluzione fondamentale**, definita dall'antitrasformata di $Q(s)^{-1}$,

$$q(t) \sqsubset Q(s) \qquad (7.39)$$

si ottiene

$$u(t) = a_nu_{n-1}q(t).$$

$q(t)$ si può calcolare con il metodo dei residui (7.18)–(7.19), se si conoscono le radici di Q, dette anche **radici caratteristiche** dell'equazione differenziale.

2. Il secondo caso corrisponde a $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = 0$: si ha quindi

$$\mathcal{U}(s) = \frac{\mathcal{F}(s)}{Q(s)} = \mathcal{F}(s)\frac{1}{Q(s)}$$

da cui

$$u(t) = f * q = \int_0^t q(x) f(t-x)\, dx, \tag{7.40}$$

che esprime u come convoluzione del dato f con la soluzione fondamentale dell'equazione.