

Prova *in itinere*, 26 novembre 2001.

Esercizio.[8 punti] *Calcolare, giustificando il risultato,*

$$A := \lim_{n \uparrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - e^{-n(1+i)t}}{t^{1/2}} dt, \quad B := \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{-s(t^2+1)}}{t^2+1} dt \quad s \geq 1.$$

SOLUZIONE. Per il limite, si tratta di applicare il teorema della convergenza dominata (la funzione integranda è a valori complessi). Si verifica facilmente che

$$\left| \frac{e^{-n(1+i)t}}{t^{1/2}} \right| = \left| \frac{e^{-nt} e^{-nit}}{t^{1/2}} \right| = \left| \frac{e^{-nt}}{t^{1/2}} \right| \leq \left| \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} \right|$$

che è una funzione integrabile in $(0, 1)$ (l'unica singolarità è data dal denominatore, che si annulla per $t = 0$ con esponente tuttavia integrabile). Quanto al limite, la precedente maggiorazione mostra che

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \left| \frac{e^{-n(1+i)t}}{t^{1/2}} \right| \leq \lim_{n \uparrow +\infty} \left| \frac{e^{-nt}}{t^{1/2}} \right| = 0 \quad \text{se } t > 0.$$

Di conseguenza ¹ si ha:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} = 2.$$

Per quanto riguarda il calcolo di B , una derivazione (inizialmente solo formale) sotto il segno di integrale mostra che

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{-s(t^2+1)}}{t^2+1} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \frac{2te^{-s(t^2+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^{+\infty} -(t^2+1) \frac{2te^{-s(t^2+1)}}{t^2+1} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} 2te^{-s(t^2+1)} dt = - \int_1^{+\infty} e^{-sx} dx \\ &= - \frac{e^{-s}}{s} \quad [\text{sostituzione: } x := t^2 + 1] \end{aligned}$$

Rimane da giustificare il passaggio iniziale: dato che le funzioni in gioco sono tutte regolari (addirittura C^∞) basta maggiorare la funzione integranda del penultimo integrale indipendentemente dal parametro s : ora, essendo $s \geq 1$, si ha

$$2te^{-s(t^2+1)} \leq 2te^{-(t^2+1)} \quad \text{che è integrabile in } (0, +\infty).$$

Esercizio.[8 punti] *Calcolare, giustificando il risultato, le trasformate di Fourier di*

$$u := \frac{(1+i)t}{t^2+2}, \quad v := \frac{d}{dt} \left(it e^{-\sqrt{2}|t|} \right).$$

Applicare uno dei due risultati ottenuti al calcolo di

$$I := \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(2+t^2)^2} dt.$$

¹È equivalente maggiorare la funzione integranda (che è la somma di due termini, di cui il primo è indipendente da n) o, per linearità dell'integrale, scrivere

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-n(1+i)t}}{t^{1/2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt - \int_0^1 \frac{e^{-n(1+i)t}}{t^{1/2}} dt$$

e considerare solo quest'ultimo termine.

SOLUZIONE. Per quanto riguarda u , basta ricordare che

$$\mathcal{F}[(1+i)tw] = (1+i)\mathcal{F}[tw] = (1+i)\frac{i}{2\pi}\frac{d}{df}\mathcal{F}[w].$$

Nel nostro caso

$$w(t) = \frac{1}{t^2+2}, \quad \mathcal{F}[w](f) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-2\pi\sqrt{2}|f|}$$

da cui

$$\hat{u}(f) = \frac{(1+i)i}{2\pi}\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-2\pi\sqrt{2})\text{sign}(f)e^{-2\pi\sqrt{2}|f|} = -i(1+i)\pi\text{sign}(f)e^{-2\pi\sqrt{2}|f|}$$

Per quanto riguarda v , si applica la formula

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}itw\right] = (2\pi if)\mathcal{F}[itw] = -\frac{2\pi if}{2\pi}\frac{d}{df}\mathcal{F}[w] = -if\frac{d}{df}\mathcal{F}[w].$$

In questo caso

$$w(t) = e^{-\sqrt{2}|t|}, \quad \hat{w}(f) = \frac{2\sqrt{2}}{2+(2\pi f)^2}.$$

e quindi

$$\hat{v}(f) = -if\frac{d}{df}\frac{2\sqrt{2}}{2+(2\pi f)^2} = \frac{2\sqrt{2}(8\pi^2 f)if}{(2+(2\pi f)^2)^2} = 4\sqrt{2}i\frac{(2\pi f)^2}{(2+(2\pi f)^2)^2}.$$

Finalmente, per il calcolo di I usiamo l'identità di Plancherel applicata a u :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt &= \left| \frac{(1+i)t}{t^2+2} \right|^2 dt = |1+i|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = 2I \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} |1+i|^2 \pi^2 e^{-4\pi\sqrt{2}|f|} df = 4\pi^2 \int_0^{+\infty} e^{-4\pi\sqrt{2}f} df = \frac{4\pi^2}{4\pi\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

da cui

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Esercizio.[6 punti] *Discutere la convergenza e calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier delle funzioni 4π periodiche u, v la cui restrizione all'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ vale*

$$u(t) := \begin{cases} 2 & \text{se } |t| \leq \pi; \\ 0 & \text{se } |t| > \pi. \end{cases} \quad v(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \pi; \\ -1 & \text{se } |t| > \pi. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Le funzioni u, v sono limitate e regolari a tratti, in particolare appartengono allo spazio $L^2_{4\pi}(\mathbb{R})$. Dunque le rispettive serie di Fourier convergono in norma $L^2_{4\pi}(\mathbb{R})$ e puntualmente ovunque (con la consueta convenzione nei punti di discontinuità di u e v). Inoltre si vede immediatamente che $v = u - 1$ per cui basta calcolare lo sviluppo di u . Si ha

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u(t)e^{-i(n/2)t} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{-i(n/2)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n/2)t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi(n/2)x} dx = \text{sinc}(n/2) \quad [\text{sostituzione: } t = 2\pi x]. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc}(n/2)e^{i(n/2)t}, \quad v(t) = \sum_{n \neq 0} \text{sinc}(n/2)e^{i(n/2)t}.$$

Esercizio.[4 punti] Tra le funzioni 2π periodiche u tali che

$$u'(t) = v(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{int-2|n|}$$

determinare quella di energia $E := \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 dt$ minima; calcolare E .

Facoltativo: mostrare che v è una funzione di classe C^∞ e calcolarla.

SOLUZIONE. La funzione v ammette lo sviluppo in serie di Fourier

$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n e^{-|n|}) e^{int}, \quad \hat{v}_n = n e^{-|n|}.$$

È facile controllare che

$$n^k v_n \in \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}; \text{ ciò mostra appunto che } v \in C^\infty.$$

Comunque $v \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\hat{v}_0 = 0$ e di conseguenza le sue primitive 2π -periodiche hanno lo sviluppo in serie

$$u(t) = \hat{u}_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{n e^{-|n|}}{in} e^{int} = \hat{u}_0 - i \sum_{n \neq 0} e^{-|n|} e^{int},$$

e sono quindi determinate a meno della costante \hat{u}_0 . La loro energia, per Parseval, si ottiene come

$$\frac{E}{2\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2 = |\hat{u}_0|^2 + \sum_{n \neq 0} e^{-2|n|};$$

Da questa relazione segue che l'energia minima si ha per $\hat{u}_0 = 0$; inoltre

$$E = 2\pi \sum_{n \neq 0} e^{-2|n|} = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2})^n = 4\pi \left(\frac{1}{1 - e^{-2}} - 1 \right).$$

Esercizio.[3 punti] Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ il segnale complesso la cui trasformata di Fourier è

$$\hat{u}_\alpha(f) := \text{sign}(f - \alpha) \text{rect}(f - \alpha).$$

Calcolare

$$I := \int_{\mathbb{R}} (u_\alpha(t))^2 dt.$$

SOLUZIONE. Trattandosi dell'integrale del quadrato di u_α e non del modulo al quadrato, siccome u_α non è reale per $\alpha \neq 0$, non si può applicare direttamente Plancharel. Si può comunque scrivere il prodotto come

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} u_\alpha(t) \overline{u_\alpha(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_\alpha(f) \overline{\mathcal{F}[\overline{u_\alpha}](f)} df = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_\alpha(f) \overline{\mathcal{F}[u_\alpha](f)} df \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_\alpha(f) \mathcal{F}[u_\alpha](-f) df = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_\alpha(f) \hat{u}_\alpha(-f) df \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare osservando che

$$\int_{\mathbb{R}} (u_\alpha(t))^2 dt = \mathcal{F} \left[(u_\alpha(t))^2 \right] (0) = \hat{u}_\alpha * \hat{u}_\alpha(0).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_\alpha(f) \hat{u}_\alpha(-f) df &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(f - \alpha) \hat{u}_0(-f - \alpha) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s) \hat{u}_0(-s - 2\alpha) ds \quad [\text{sostituzione } f = s + \alpha] \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s) \hat{u}_0(s + 2\alpha) ds \quad [\hat{u}_0 \text{ è dispari}] \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s - 2\alpha) \hat{u}_0(s) ds \end{aligned}$$

Graficamente si vede che se $|\alpha| \geq 1$ l'integrale è nullo. Si può inoltre supporre $\alpha \geq 0$, essendo la funzione pari rispetto a α . Se $0 \leq \alpha \leq 1/2$ si ha (basta fare un disegno...)

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s - 2\alpha) \hat{u}_0(s) ds = 1 - 3\alpha$$

mentre se $1/2 \leq \alpha \leq 1$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s - 2\alpha) \hat{u}_0(s) ds = \alpha - 1.$$

Si conclude quindi che

$$I = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| \geq 1; \\ 3|\alpha| - 1 & \text{se } 0 \leq |\alpha| \leq 1/2; \\ 1 - |\alpha| & \text{se } 1/2 \leq |\alpha| \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio.[3 punti] *Posto*

$$u_n(t) := e^{-\pi t^2} \mathbf{1}_{(n, n+1)}(t), \quad v_n(t) := e^{-\pi t^2} \mathbf{1}_{(n, n+2)}(t)$$

discutere se le relative serie

$$U(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) \quad V(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(t) \quad \text{convergono in } L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R});$$

calcolarne la somma $U(t), V(t)$.

SOLUZIONE. Si vede che

$$U(t) = e^{-\pi t^2}, \quad V(t) = 2e^{-\pi t^2} \quad [\text{ciascun intervallo si sovrappone con metà di quelli adiacenti}].$$

Per discutere la convergenza, si può osservare intanto che $v_n = u_n + u_{n+1}$, quindi ci si può ricondurre comunque alla prima serie di funzioni. Per la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ basta osservare che la serie degli integrali converge (sono funzioni non negative). Per la convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ si può osservare che le funzioni u_n formano un sistema ortogonale e applicare il relativo criterio di convergenza. In entrambi i casi si può anche applicare il criterio della convergenza dominata, poichè le somme parziali sono comunque inferiori alla funzione U che appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e a $L^2(\mathbb{R})$.

Infine, per la convergenza uniforme, si applica il criterio di Weierstrass e si maggiora ciascun termine con $e^{-\pi n^2}$ (se $n \geq 0$) o $e^{-\pi(n+1)^2}$ (se $n < -1$).

Esercizio.[2 punti] *Mostrare che se $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ sono non nulli e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sono tali che*

$$\mathcal{F}[u] = \alpha u, \quad \mathcal{F}[v] = \beta v \quad \text{con } \alpha \neq \beta$$

allora $|\alpha| = |\beta| = 1$ e u è ortogonale a v . Dedurre che le funzioni

$$e^{-\pi t^2}, \quad (4\pi^2 t^2 - \pi)e^{-\pi t^2}$$

sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Per mostrare che $|\alpha| = 1$ si applica Plancherel

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R})} = |\alpha| \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

da cui, appunto, si deduce $|\alpha| = 1$, essendo $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$.

Per mostrare che u è ortogonale a v basta osservare che

$$(u, v)_{L^2(\mathbb{R})} = (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{R})} = (\alpha u, \beta v)_{L^2(\mathbb{R})} = \alpha \bar{\beta} (u, v)_{L^2(\mathbb{R})},$$

da cui, essendo $\bar{\beta} = \beta^{-1}$

$$\left[1 - \alpha/\beta\right] (u, v)_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \quad \Rightarrow \quad (u, v)_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Per rispondere all'ultima domanda, si sa che

$$\mathcal{F}[e^{-\pi t^2}] = e^{-\pi f^2}$$

mentre

$$\mathcal{F}[4\pi^2 t^2 e^{-\pi t^2}] = -\frac{d^2}{df^2} e^{-\pi f^2} = -\frac{d}{df} (-2\pi f e^{-\pi f^2}) = -4\pi^2 f^2 e^{-\pi f^2} + 2\pi e^{-\pi f^2}.$$

da cui

$$\mathcal{F}\left[(4\pi^2 t^2 - \pi) e^{-\pi t^2}\right] = -(4\pi^2 f^2 - \pi) e^{-\pi f^2}.$$

Si applica quindi il precedente risultato con $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

Esercizio.[2 punti] Calcolare $S := \sum_{n \neq 0} \frac{(\sin n)^4}{n^2}$.

SOLUZIONE. Posto

$$u(t) = v(t/\pi), \quad v(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t} = \sin(\pi t) \operatorname{sinc}(t).$$

Si tratta di calcolare

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |v(n/\pi)|^2,$$

serie ottenuta sommando i quadrati dei moduli della funzione v campionata a passo $\tau := 1/\pi$.

Ora, dalle tavole si ha

$$\hat{v}(f) = \frac{1}{2i} \left(\operatorname{rect}(f - 1/2) - \operatorname{rect}(f + 1/2) \right)$$

sicché lo spettro della funzione v ha banda limitata nell'intervallo $(-1, 1)$. Il teorema del campionamento vale quindi se il passo è inferiore a $1/2$: in questo caso il passo è $1/\pi$ che è accettabile. Ne segue che

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v(n/\pi)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(f)|^2 df = 1/2$$

da cui

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(\sin n)^4}{n^2} = \frac{\pi}{2}.$$