

Soluzioni agli Esercizi della Prova Scritta

9 luglio 2001

Esercizio.[4 punti] Calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(t) := \text{v.p.} \frac{\cos \pi t}{i\pi(t-1)}.$$

Soluzione. Poiché

$$\cos \pi t = -\cos \pi(t-1)$$

si tratta di trasformare

$$u(t) = -\text{v.p.} \frac{\cos \pi(t-1)}{i\pi(t-1)}.$$

Ora

$$\mathcal{F} \left[-\text{v.p.} \frac{1}{i\pi t} \right] = \text{sign } f,$$

$$\mathcal{F} \left[-\text{v.p.} \frac{\cos \pi t}{i\pi t} \right] = 1/2 (\text{sign}(f-1/2) + \text{sign}(f+1/2)).$$

Finalmente

$$\mathcal{F}[u] = \frac{e^{-2\pi i f}}{2} (\text{sign}(f-1/2) + \text{sign}(f+1/2)).$$

Esercizio.[4 punti] Calcolare la derivata distribuzionale e lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$v(t) := \log(e^{i\pi t})$$

dove \log indica il ramo principale della funzione logaritmo in campo complesso.

Soluzione. La funzione vale

$$v(t) = i\pi t \quad \text{nell'intervallo } -1 < t \leq 1;$$

al di fuori di tale intervallo viene prolungata per periodicità di periodo 2. Segue che

$$v'(t) = 2\pi i (\delta(t-1) + \delta(t+1) + \delta(t-3) + \delta(t+3) + \dots) = 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-2n-1) = 2\pi i \tilde{\delta}_2(t-1).$$

Dalle tavole segue che

$$\mathcal{F}[v'] = \pi i e^{-2\pi i f} \tilde{\delta}_{1/2}(f) = \pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n/2} \delta(f-n/2) = \pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta(f-n/2).$$

Di conseguenza i coefficienti di Fourier di v sono

$$c_n := \pi i (-1)^n$$

corrispondenti allo sviluppo in serie

$$v(t) = i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n t}.$$

Esercizio.[4 punti] Calcolare l'integrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{(t-\pi)(t-i\pi)} dt$$

precisando se esso va inteso nel senso di Lebesgue o nel senso del valor principale.

Soluzione. L'integrale esiste nel senso di Lebesgue, poichè la funzione integranda ha una singolarità eliminabile per $t = \pi$ e è asintotica a $1/|t|^2$ per $|t| \uparrow +\infty$. La quantità $2iI$ si può anche riscrivere come la somma di

$$I_1 := \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-\pi)(t-i\pi)} dt, \quad I_2 := -\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{(t-\pi)(t-i\pi)} dt$$

ciascuno dei quali può essere calcolato mediante il Lemma di Jordan.

Le singolarità sono in $t = \pi$ (reale) e in $t = i\pi$. Si ha

$$\begin{aligned} \text{res} \left(\frac{e^{it}}{(t-\pi)(t-i\pi)}; t = \pi \right) &= \frac{e^{i\pi}}{\pi(1-i)} = \frac{1}{\pi(i-1)}, \\ \text{res} \left(\frac{e^{it}}{(t-\pi)(t-i\pi)}; t = i\pi \right) &= \frac{e^{-\pi}}{\pi(i-1)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi i}{\pi(i-1)} + \frac{2\pi i e^{-\pi}}{\pi(i-1)}, \\ I_2 &= \frac{\pi i}{\pi(i-1)} \end{aligned}$$

da cui

$$2iI = \frac{2i(1+e^{-\pi})}{i-1}, \quad I = \frac{1+e^{-\pi}}{i-1}.$$

Esercizio.[3 punti] Calcolare la trasformata di Laplace (quando essa esiste) delle funzioni

$$u(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} H(t) \frac{t^n}{n!}, \quad v(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} H(t-n) \frac{(t-n)^n}{n!}, \quad w(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} (H(t) - H(t-1)) t^n.$$

Soluzione. Si ha evidentemente

$$u(t) = H(t)e^t \quad \text{da cui} \quad \mathcal{U}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

La trasformata di v si ottiene per serie:

$$\mathcal{V}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-ns}}{s^n} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-s}}{s} \right)^n = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-s}/s} = \frac{1}{s - e^{-s}}.$$

A posteriori si controlla che il calcolo abbia senso, per esempio applicando il teorema di integrazione per serie (di funzioni positive) all'integrale (ottenuto scegliendo ad esempio $s = 1$)

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} H(t-n) \frac{(t-n)^n}{n!} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} H(t-n) \frac{(t-n)^n}{n!} e^{-t} dt = \mathcal{V}(1) < +\infty.$$

Finalmente per l'ultima serie si ha

$$w(t) = (H(t) - H(t-1)) \frac{1}{1-t}$$

che non è integrabile sull'intervallo $(0, 1)$: dunque w non è una funzione \mathcal{L} trasformabile.

Esercizio.[3 punti] Mediante quale condizione deve soddisfare \hat{u} e $\alpha \in \mathbb{R}$ perchè l'equazione di convoluzione

$$u * \sin(\pi t) = \sin(\alpha \pi t)$$

abbia soluzione.

Soluzione. Passando alla trasformata di Fourier si ha

$$\frac{1}{2i} \hat{u}(f) (\delta(f - 1/2) - \delta(f + 1/2)) = \frac{1}{2i} (\delta(f - \alpha/2) - \delta(f + \alpha/2)),$$

da cui

$$\hat{u}(1/2) \delta(f - 1/2) - \hat{u}(-1/2) \delta(f + 1/2) = \delta(f - \alpha/2) - \delta(f + \alpha/2).$$

Deve pertanto essere $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$; nel primo caso si ha

$$\hat{u}(1/2) = \hat{u}(-1/2) = 1$$

mentre se $\alpha = -1$ la condizione richiesta è

$$\hat{u}(1/2) = \hat{u}(-1/2) = -1.$$

Esercizio.[3 punti] Determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$u(t) := \text{sinc}^2 t, \quad v(t) := e^{i\beta\pi t} \text{sinc } t$$

sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. Sappiamo che due funzioni sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$ se e soltanto se lo sono le rispettive trasformate di Fourier. Si ha

$$\hat{u}(f) = (1 - |f|)^+, \quad \hat{v}(f) = \text{rect}(f - \beta/2).$$

Trattandosi di funzioni reali positive, è facile vedere che le funzioni sono ortogonali solo se i loro supporti sono disgiunti, cioè se

$$\beta \geq 3 \quad \text{oppure} \quad \beta \leq -3.$$