Soluzioni agli Esercizi della Prova Scritta

Corso di *Metodi Matematici per l'Ingegneria.*

8 febbraio 1999

Esercizio. [12 PUNTI] *Sia $f \in \mathscr{S}'_T$ una distribuzione T-periodica e sia $\lambda \in C$ un numero complesso assegnato. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni $u \in \mathscr{S}'_T$ dell'equazione*

$$\frac{d}{dt}u - \lambda u = f$$

calcolandone i coefficienti di Fourier in funzione di quelli di f. Applicare il risultato al caso

$$f_1(t) = (\cos t)^2, \quad f_2(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-k), \quad \textit{per } \lambda = i.$$

(*) **Facoltativo** *Discutere la regolarità delle soluzioni trovate.*

SOLUZIONE. Siano f_k, $k \in \mathbb{Z}$, i coefficienti di Fourier di f, per i quali vale lo sviluppo in $\mathscr{S}'$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ik\omega t}, \quad \omega := \frac{2\pi}{T}.$$

Se esiste una soluzione $u \in \mathscr{S}'_T$ dell'equazione differenziale, anch'essa ammette uno sviluppo di Fourier

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ik\omega t}$$

da cui, potendo derivare per serie in $\mathscr{S}'$,

$$\frac{d}{dt}u - \lambda u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega - \lambda) u_k e^{ik\omega t}.$$

Eguagliando termine a termine, otteniamo le infinite equazioni

$$(ik\omega - \lambda) u_k = f_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ora, se λ *non* è un multiplo intero di $i\omega$, otteniamo univocamente

$$u_k = \frac{f_k}{ik\omega - \lambda} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

cioè l'unica soluzione

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{f_k}{ik\omega - \lambda} e^{ik\omega t}.$$

Se invece

$$\frac{\lambda}{i\omega} = k_0 \in \mathbb{Z}$$

l'equazione differenziale avrà soluzioni solo se

$$f_{k_0} = 0$$

ed in tal caso il coefficiente u_{k_0} rimane indeterminato.

Nel primo esempio proposto abbiamo

$$T = \pi, \quad \omega = 2, \quad \frac{\lambda}{i\omega} = 1/2$$

che non è intero; abbiamo quindi un'unica soluzione. Lo sviluppo di f_1 si ottiene immediatamente

$$f_1(t) = (\cos t)^2 = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2it} + 2 + e^{-2it})$$

da cui

$$f_{1,1} = f_{1,-1} = \tfrac{1}{4}, \quad f_{1,0} = \tfrac{1}{2}, \quad f_{1,k} \equiv 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Ricaviamo che

$$u_1 = \frac{1}{4(-i/2)} = \frac{i}{2}, \quad u_0 = \frac{i}{2}, \quad u_{-1} = \frac{1}{4(-3i/2)} = \frac{i}{6}$$

cioè

$$u(t) = \frac{i}{6}(3e^{2it} + 3 + e^{-2it}).$$

Nel secondo esempio,

$$f_2(t) = \tilde{\delta}_1(t), \quad \hat{f}(\xi) = \tilde{\delta}_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\xi - k);$$

i coefficienti di Fourier sono pertanto $f_k \equiv 1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$$T = 1, \quad \omega = 2\pi, \quad \frac{\lambda}{i\omega} = \frac{1}{2\pi}$$

anche in tal caso la soluzione è unica, e si ha:

$$u_k := \frac{1}{ik/2\pi - i} = \frac{2\pi i}{2\pi - k},$$

$$u(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi i e^{2\pi i k t}}{2\pi - k}.$$

Per quanto riguarda la regolarità delle soluzioni, nel primo caso è immediato vedere che u è C^∞ e analitica; nel secondo caso, si ha

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 = 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|2\pi - k|^2} < +\infty$$

quindi sappiamo a priori che la serie di Fourier converge in L^2_1 e quasi ovunque a u, che è di quadrato integrabile su ogni periodo.

Esercizio. [12 PUNTI] *Sia* $f_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-1}\chi_{(0,\varepsilon)}(t)$ *e* u_ε *la funzione regolare che risolve l'equazione*

$$u_\varepsilon'(t) + 5u_\varepsilon(t) + 4\int_0^t u_\varepsilon(s)\,ds = f_\varepsilon(t), \quad u_\varepsilon(0) = 0.$$

Si calcoli la funzione $U_\varepsilon(t) := H(t)u_\varepsilon(t)$ *e si determini poi il limite*

$$U_0(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} U_\varepsilon(t) \quad \textit{nel senso delle distribuzioni.}$$

Verificare infine che $U_\varepsilon = U_0 * f_\varepsilon$.

SOLUZIONE. Poiché

$$\frac{d}{dt}U_\varepsilon = H(t)u_\varepsilon' + u_\varepsilon(0)\delta(t) = H(t)u_\varepsilon'$$

la distribuzione U_ε risolve l'equazione di convoluzione

$$(\delta' + 5\delta + 4H) * U_\varepsilon = f_\varepsilon.$$

Determiniamo la soluzione fondamentale E, quella cioè che risolve l'equazione:

$$(\delta' + 5\delta + 4H) * E = \delta.$$

Posto $\mathcal{E} = \mathscr{L}(E)$ si ha

$$(p + 5 + 4/p)\mathcal{E}(p) = 1$$

cioè

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{p + 5 + 4/p} = \frac{p}{p^2 + 5p + 4}.$$

Le radici del denominatore sono

$$p_1 = -4, \quad p_2 = -1,$$

e il residuo della frazione in tali radici è

$$r_1 = \frac{-4}{-4+1} = \frac{4}{3}, \quad r_2 = \frac{-1}{-1+4} = -\frac{1}{3}$$

da cui

$$\mathcal{E}(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 4} = \frac{4/3}{p+4} - \frac{1/3}{p+1}$$

$$E(t) = \frac{4}{3}H(t)e^{-4t} - \frac{1}{3}H(t)e^{-t}.$$

Per trovare U_ε basta allora scrivere

$$U_\varepsilon = E * f_\varepsilon; \tag{1}$$

poiché $f_\varepsilon \to \delta$ in $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ e la convoluzione con una distribuzione fissata è continua in $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, si vede subito che

$$U_\varepsilon \to E * \delta = E = U_0.$$

Ricaviamo quindi che U_0 è proprio la soluzione fondamentale (che abbiamo già trovato) dell'equazione; in particolare, l'uguaglianza $U_\varepsilon = U_0 * f_\varepsilon$ segue da (1).

Esercizio. [12 PUNTI] *Indicando con* p.f. $\frac{1}{\xi^2}$ *la distribuzione*

$$\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2} := -\frac{d}{d\xi}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{\xi}\right),$$

si calcoli la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni della variabile $t \in \mathbb{R}$*:*

$$|2t-1|, \quad H(-t)(t-1/2), \quad H(t)te^{-2\pi\varepsilon t}$$

precisando per quali valori di $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *ha senso la domanda. Finalmente, posto*

$$f_\varepsilon(\xi) := \frac{1}{(\xi - i\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

si utilizzi l'ultimo risultato per calcolare il limite $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(\xi)$ *in* $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$*.*

SOLUZIONE. Osserviamo che

$$|2t-1| = 2|t-1/2|$$

sicché sarà sufficiente calcolare la trasformata della funzione $|t|$. Ricordando che

$$|t| = t\,\text{sign}(t)$$

e che la trasformata della distribuzione $\text{sign}(t)$ è data da

$$\mathscr{F}(\text{sign}(t)) = \text{v.p.}\,\frac{1}{\pi i\xi},$$

ricaviamo

$$\mathscr{F}(|t|) = \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\pi i\xi} = -\frac{1}{2\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2}$$

$$\mathscr{F}(|2t-1|) = -\frac{e^{-i\pi\xi}}{\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2}.$$

Per calcolare la trasformata di Fourier di $H(-t)(t-1/2)$ ricordiamo che

$$\mathscr{F}(H(t)) = \tfrac{1}{2}\Big(\text{v.p.}\,\frac{1}{i\pi\xi} + \delta(\xi)\Big) \tag{2}$$

da cui

$$\mathscr{F}(H(-t)) = \tfrac{1}{2}\Big(-\text{v.p.}\,\frac{1}{i\pi\xi} + \delta(\xi)\Big),$$

$$\mathscr{F}(H(-t)t) = \frac{i}{4\pi}\frac{d}{d\xi}\Big(-\text{v.p.}\,\frac{1}{i\pi\xi} + \delta(\xi)\Big) = \frac{1}{4\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{4\pi}\delta'(\xi) \tag{3}$$

e infine

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(H(-t)(t-1/2)) &= \mathscr{F}(tH(-t)) - \tfrac{1}{2}\mathscr{F}(H(-t)) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{4\pi}\delta'(\xi) + \frac{1}{4\pi i}\,\text{v.p.}\,1\xi - \frac{1}{4}\delta(\xi).\end{aligned}$$

La funzione

$$H(t)te^{-2\pi\varepsilon t}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ se $\operatorname{Re}\varepsilon > 0$, mentre è a crescita polinomiale (e quindi definisce una distribuzione temperata di $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$) se $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$. Quando $\operatorname{Re}\varepsilon < 0$ la funzione non è neppure in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ e quindi non ha senso parlare della sua trasformata di Fourier.

Cominciamo dal caso $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$, cioè $\varepsilon = i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalla (4) ricaviamo

$$\mathscr{F}(H(t)t)(\xi) = \mathscr{F}(H(-t)(-t))(-\xi) = -\mathscr{F}(H(-t)(t))(-\xi) = -\frac{1}{4\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{4\pi}\delta'(\xi) \tag{4}$$

da cui

$$\mathscr{F}(H(t)te^{-2\pi i\alpha t} = -\frac{1}{4\pi^2}\,\text{p.f.}\,\frac{1}{(\xi-\alpha)^2} + \frac{i}{4\pi}\delta'(\xi-\alpha).$$

Nel caso $\operatorname{Re}\varepsilon > 0$ sfruttiamo le tabelle della trasformata di Laplace che ci forniscono

$$H(t)te^{-2\pi\varepsilon t} \sqsupset \frac{1}{(p+2\pi\varepsilon)^2}$$

da cui

$$\mathscr{F}(H(t)te^{-2\pi\varepsilon t}) = \frac{1}{(2\pi i\xi + 2\pi\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(i\xi+\varepsilon)^2}.$$

Per calcolare l'ultimo limite osserviamo che, per $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{(\xi - i\varepsilon)^2} = \frac{-1}{(i\xi+\varepsilon)^2} = -4\pi^2\mathscr{F}(H(t)te^{-2\pi\varepsilon t}).$$

Poiché si vede facilmente che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} H(t)te^{-2\pi\varepsilon t} = H(t)t \quad \text{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R})$$

per la continuità della trasformata di Fourier in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ concludiamo grazie a (4) che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(\xi) = -4\pi^2\mathscr{F}(H(t)t) = \text{p.f.}\,\frac{1}{\xi^2} - i\pi\delta'(\xi).$$

Esercizio. [12 PUNTI] *Sia g una distribuzione a supporto compatto; dimostrare le seguenti affermazioni:*

1. *Se f è una distribuzione T-periodica, allora $f * g$ è T-periodica.*
2. *Se f risolve l'equazione omogenea in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$*

$$\frac{d^n}{dt^n}f + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}f + \ldots + a_1\frac{d}{dt}f + a_0 f = 0$$

   allora anche $f * g$ la risolve.
3. *In particolare, se f è un polinomio, anche $f * g$ è un polinomio.*

SOLUZIONE.

1. Una distribuzione h è T periodica se e solo se

$$\delta(t-T) * h = h. \tag{5}$$

   Abbiamo perciò

$$\delta(t-T) * f = f$$

   e dobbiamo mostrare che anche $f * g$ soddisfa (5). Si ha:

$$\delta(t-T) * (f * g) = (\delta(t-T) * f) * g = f * g,$$

   dove abbiamo sfruttato la proprietà associativa della convoluzione essendo g e $\delta(t-T)$ a supporto compatto.

2. Posto

$$D := \delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + a_{n-2}\delta^{(n-2)} + \ldots + a_1\delta' + a_0\delta,$$

una distribuzione h soddisfa l'equazione differenziale proposta se e solo se

$$D * h = 0 \tag{6}$$

Abbiamo perciò

$$D * f = 0$$

e dobbiamo mostrare che anche $f * g$ soddisfa (6). Analogamente a prima si ha:

$$D * (f * g) = (D * f) * g = 0 * g = 0$$

dove abbiamo ancora sfruttato la proprietà associativa della convoluzione essendo g e D a supporto compatto.

3. Per concludere, osserviamo che una distribuzione h è un polinomio di grado $n - 1$ se e solo se

$$\frac{d^n}{dt^n} h = 0$$

cioè siamo nel caso precedente, per la particolare equazione differenziale che si ottiene scegliendo $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.