

Soluzioni agli Esercizi della Prova Scritta

Corso di *Metodi Matematici per l'Ingegneria*.

26 giugno 1998

Esercizio. [7 PUNTI] Sia u_ε , $\varepsilon > 0$, la funzione definita da

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ appartiene ad un intervallo } [n, n + \varepsilon] \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier \hat{u}_ε di u_ε . Calcolare poi il limite, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, di u_ε e di \hat{u}_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. La funzione u_ε è periodica di periodo 1 e di quadrato integrabile su ogni intervallo; di conseguenza la sua trasformata di Fourier è del tipo

$$\hat{u}_\varepsilon(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k,\varepsilon} \delta_{2\pi k}(\xi)$$

dove $u_{k,\varepsilon}$ vale

$$u_{k,\varepsilon} = \int_0^1 u_\varepsilon(t) e^{-2\pi i k t} dt.$$

In questo caso si ottiene

$$u_{k,\varepsilon} = \int_0^\varepsilon e^{-2\pi i k t} dt = \frac{1 - e^{-2\pi i k \varepsilon}}{2\pi i k} = e^{-\pi i k \varepsilon} \frac{\sin(k\pi\varepsilon)}{k\pi}, \quad \text{se } k \neq 0,$$

$$u_{0,\varepsilon} = \varepsilon.$$

Per calcolare il limite di u_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ basta fissare una funzione test a decrescenza rapida $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e calcolare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(t) \phi(t) dt.$$

A questo punto basta osservare che $u_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ (sono infatti esclusi solo i punti t appartenenti all'insieme numerabile \mathbb{Z} , che ha misura nulla) e che

$$|u_\varepsilon(t) \phi(t)| \leq |\phi(t)| \quad \text{che è una funzione di } L^1(\mathbb{R}) \text{ e non dipende da } \varepsilon.$$

Applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue concludiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(t) \phi(t) dt = 0.$$

Essendo ϕ arbitraria il limite di u_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è 0.

Potremmo ora ripetere un analogo ragionamento per \hat{u}_ε ; procediamo invece più velocemente ricordando che la trasformata di Fourier è continua rispetto alla convergenza di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, per cui "il limite delle trasformate è la trasformata del limite". Concludiamo che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{u}_\varepsilon = 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio. [7 PUNTI] Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di funzioni reali definite da

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

e precisare se la convergenza di f_n ad f sussiste anche in $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Posta poi \hat{f}_n la trasformata di Fourier di f_n , dire se esiste in $L^2(\mathbb{R})$ il limite di \hat{f}_n per $n \rightarrow +\infty$. Calcolare infine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

SOLUZIONE. Osserviamo che se x appartiene a $] -\infty, 1[$ allora $f_n(x)$ è sempre nulla, per cui non c'è dubbio che $f(x) \equiv 0$ in tale intervallo. Per $x \geq 1$ è immediato constatare che non appena n diventa più grande di x (il che, prima o poi, accade sicuramente...) $f_n(x) = 1/x$. Concludiamo che

$$f(x) = \frac{H(x-1)}{x}.$$

Rimane da studiare il tipo di convergenza: nel caso di $L^1(\mathbb{R})$ il problema neanche si pone in quanto f non appartiene a tale spazio. Negli altri casi, consideriamo la differenza $f_n - f$ che vale

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x > n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si tratta quindi di studiarne il limite della norma in $L^2(\mathbb{R})$ e in $L^\infty(\mathbb{R})$. In questo caso si può fare esplicitamente il calcolo:

$$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Concludiamo che f_n converge a f in $L^2(\mathbb{R})$, in $L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi anche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier \hat{f}_n , sappiamo che anch'essa converge in $L^2(\mathbb{R})$ alla trasformata \hat{f} di f , in quanto la trasformata di Fourier è un isomorfismo dello spazio $L^2(\mathbb{R})$. Per l'identità di Plancharel sappiamo poi che

$$\|\hat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Esercizio. [7 PUNTI] Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ calcolare il prodotto di convoluzione

$$u_{\alpha, \beta} := H(t)e^{\alpha t} * H(t)e^{\beta t}$$

Applicare il risultato ottenuto per determinare

$$v := H(t) \sin t * H(t) \cos t.$$

SOLUZIONE. Ricordiamo che per due segnali f, g causali e localmente integrabili in \mathbb{R} il prodotto di convoluzione $h = f * g$ si esprime facilmente mediante la formula

$$h(t) = H(t) \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Nel nostro caso otteniamo

$$u_{\alpha,\beta}(t) = H(t) \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\beta\tau} d\tau = H(t)e^{\alpha t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau} d\tau.$$

Ora, se $\alpha \neq \beta$ si ricava

$$u_{\alpha,\beta}(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta},$$

mentre nel caso $\alpha = \beta$ si ottiene

$$u_{\alpha,\alpha} = H(t)te^{\alpha t}.$$

Per calcolare il secondo prodotto di convoluzione, ricordiamo che

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

da cui

$$\begin{aligned} v &= \\ &= \frac{1}{4i} \left(H(t)e^{it} * H(t)e^{it} - H(t)e^{it} * H(t)e^{-it} + H(t)e^{-it} * H(t)e^{it} - H(t)e^{-it} * H(t)e^{-it} \right) = \\ &= \frac{1}{4i} (u_{i,i} - u_{-i,-i}) = \frac{1}{4i} H(t)t (e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2} H(t)t \sin t. \end{aligned}$$

Esercizio. [7 PUNTI] Calcolare i coefficienti $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dello sviluppo di Fourier in serie di seni e coseni della funzione

$$u(t) = (\cos t)^+ \quad (x^+ \text{ indica la parte positiva di } x.)$$

SOLUZIONE. La funzione u è 2π -periodica, pari e continua; deduciamo subito che i coefficienti b_n relativi ai seni sono identicamente nulli; di conseguenza si avrà

$$u(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,$$

dove gli a_n sono dati dalle formule

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \cos nt dt$$

grazie alla parità della funzione; poiché $\cos t \leq 0$ quando $t \in [\pi/2, \pi]$, deduciamo che

$$u(t) \equiv 0 \text{ in } [\pi/2, \pi], \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos nt dt.$$

Dalle formule di addizione sappiamo che

$$\cos(n+1)t = \cos t \cos nt - \sin t \sin nt, \quad \cos(n-1)t = \cos t \cos nt + \sin t \sin nt$$

da cui

$$2 \cos t \cos nt = \cos(n-1)t + \cos(n+1)t.$$

Sostituendo nell'integrale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(n-1)t + \cos(n+1)t) dt$$

e, per $n \neq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1} + \frac{\sin(n+1)t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{n-1} + \frac{\sin[(n+1)\pi/2]}{n+1} \right).$$

Quando n è dispari, il seno è calcolato in un multiplo pari di $\pi/2$, cioè in un multiplo di π , e quindi è nullo. Poniamo allora $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k\pi - \pi/2)}{2k-1} + \frac{\sin(k\pi + \pi/2)}{2k+1} \right].$$

Distinguiamo ancora rispetto alla parità di k : se k è pari si ha

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right] = \frac{-(2k+1) + 2k-1}{\pi(2k-1)(2k+1)} = \frac{-2}{\pi(2k-1)(2k+1)}.$$

Quando k è dispari il segno si inverte: concludiamo che in ogni caso vale la formula

$$a_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{2}{\pi(4k^2-1)}.$$

Finalmente, ricordiamo che nello sviluppo dei calcoli abbiamo tralasciato momentaneamente il caso a_n per $n = 1$: otteniamo direttamente che

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}.$$

Ricapitolando

$$u(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} \cos 2kt.$$

Esercizio. [7 PUNTI] Sia u un segnale la cui trasformata di Fourier \hat{u} ha supporto contenuto nell'intervallo $[-a, a]$, $a > 0$. Sapendo che $u(k) = 3k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, indicare per quali valori di a è possibile ricostruire univocamente u e determinare u di conseguenza. Trovare infine un v non nullo, la cui trasformata di Fourier abbia supporto limitato, tale che $v(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

SOLUZIONE. Poichè il passo di campionamento di u in questo caso è $T := 1$, sappiamo che il campionamento individua univocamente il segnale solo se l'ampiezza $2a$ del suo spettro è minore di $2\pi/T = 2\pi$ quindi se

$$a < \pi.$$

Osserviamo che il segnale u non ha energia finita, poichè i valori campionati non sono in l^2 ; quindi la disuguaglianza deve valere in senso stretto, cioè $a = \pi$ non è ammissibile.

Per ricavare u si vede subito che i valori campionati crescono linearmente, quindi $w(t) := 3t$ è sicuramente un segnale il cui campionamento coincide con quello di u ; d'altra parte, la trasformata

di Fourier di w è un multiplo della δ' concentrata nell'origine, quindi verifica la condizione sul supporto: per l'unicità cui si accennava prima, dev'essere $w \equiv u$.

Finalmente, è facile determinare v : basta scegliere

$$v(t) = \sin(\pi t)$$

che si annulla in tutti i punti interi e la cui trasformata è

$$\hat{v}(\xi) = \frac{\delta(\xi - \pi) - \delta(\xi + \pi)}{2i}, \quad \text{supp } \hat{v} = \{-\pi, \pi\}.$$

Poichè ovviamente $u + v$ ha lo stesso campionamento di u nei punti a coordinate intere, otteniamo un'ulteriore conferma della necessità della disuguaglianza stretta per a ottenuta precedentemente.

Esercizio. [7 PUNTI] *Calcolare la trasformata di Laplace dei seguenti segnali, precisando l'ascissa di convergenza:*

$$u(t) := \begin{cases} \sin(t - \pi/4) & \text{se } t \geq \pi/4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad v(t) := H(t) \sin(t - \pi/4), \quad w(t) := \begin{cases} \sin(4t - \pi) & \text{se } t \geq \pi/4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

SOLUZIONE. Ricordiamo che

$$H(t) \sin(\omega t) \sqsupset \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad H(t) \cos(\omega t) \sqsupset \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Poichè in generale $\mathcal{L}(f(\cdot - \alpha)) = e^{-\alpha p} \mathcal{L}(f)$, essendo

$$u(t) = H((t - \pi/4) \sin(t - \pi/4)) \quad \text{si ottiene} \quad \mathcal{L}(u) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}p}}{p^2 + 1}.$$

Per calcolare la trasformata di v non si può usare la formula della "traslazione" precedentemente applicata, poichè la funzione di Heaviside davanti a $\sin(t - \pi/4)$ è calcolata in t ; sviluppiamo allora il seno in

$$\sin(t - \pi/4) = \cos t \sin(\pi/4) - \sin t \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t - \sin t)$$

da cui

$$v \sqsupset \sqrt{2} \frac{p - 1}{2p^2 + 2}.$$

Finalmente,

$$w(t) = H(t - \pi/4) \sin(4(t - \pi/4)) \quad \text{da cui} \quad \mathcal{L}(w) = \frac{4e^{-\frac{\pi}{4}p}}{p^2 + 16}.$$

Esercizio. [6 PUNTI] *Calcolare le distribuzioni A^{-1}, B^{-1} , inverse rispetto al prodotto di convoluzione in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, delle seguenti*

$$A(t) := \delta'(t) + H(t), \quad B(t) := \delta(t) + 2\omega H(t) \cos(\omega t).$$

SOLUZIONE. Trattandosi di distribuzioni Laplace trasformabili, supponendo che anche le inverse lo siano, dovrà essere

$$\mathcal{L}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathcal{L}(A)}, \quad \mathcal{L}(B^{-1}) = \frac{1}{\mathcal{L}(B)}.$$

Poiché

$$A \square p + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 1}{p}$$

per A^{-1} si ottiene

$$\mathcal{L}(A^{-1}) = \frac{p}{p^2 + 1} \Rightarrow A^{-1} = H(t) \cos t.$$

Per B si ha

$$\mathcal{L}(B) = 1 + \frac{2\omega p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p^2 + 2\omega p + \omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{(p + \omega)^2}{p^2 + \omega^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B^{-1}) &= \frac{p^2 + \omega^2}{(p + \omega)^2} = \frac{(p + \omega)^2 - 2\omega p}{(p + \omega)^2} = \\ &= \frac{(p + \omega)^2 - 2\omega p - 2\omega^2 + 2\omega^2}{(p + \omega)^2} = \frac{(p + \omega)^2 - 2\omega(p + \omega) + 2\omega^2}{(p + \omega)^2} = \\ &= 1 - \frac{2}{p + \omega} + 2\frac{\omega^2}{(p + \omega)^2} \end{aligned}$$

e finalmente

$$B^{-1} = \delta_0 - 2H(t)e^{-\omega t} + 2\omega^2 H(t)te^{-\omega t}.$$

Esercizio. [6 PUNTI] *Calcolare l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

SOLUZIONE. Chiamato I l'integrale da calcolare, per simmetria si ha

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

Applicando il lemma di Jordan, si ottiene subito

$$2I = \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}; z = i \right) \right] = 2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{z e^{iz}}{2z} \right) \Big|_{z=i} = 2\pi \operatorname{Re} \frac{i e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1},$$

cioè

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-1}.$$