Prova *in itinere*, 27 novembre 2000.

**Esercizio 1** Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti coppie di funzioni sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} H(t)e^{-t}, H(-t+\alpha)e^t \\ \mathrm{rect}(t)e^{i\alpha t}, \mathrm{rect}(t)e^{2\pi i t} \\ \mathrm{sinc}(t-\alpha), \mathrm{sinc}(t) \end{cases}$$

**Esercizio 2** Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$e^{-\pi(t-i)^2}, \quad \mathrm{sinc}(t) * \mathrm{sinc}(t/2) * \mathrm{sinc}(t/4), \quad \frac{\mathrm{sinc}(t)}{t+i}$$

**Esercizio 3** Per $x \geq 1$ sia $u(x)$ la funzione definita da

$$u(x) := \int_1^{+\infty} \frac{2e^{-tx}}{t}\, dt; \quad \text{calcolare} \begin{cases} u'(x) \\ \int_0^{+\infty} u(x)\, dx \end{cases} \qquad \text{giustificando il risultato.}$$

**Esercizio 4** Calcolare

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\sin nt}{\sqrt{t}}\, dt; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt \quad \text{giustificando il risultato.}$$

**Esercizio 5** Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi$-periodica $u_\alpha$ che nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ vale

$$u_\alpha(t) := e^{i\alpha t}$$

discutendo la convergenza della serie.

Applicare il risultato per calcolare, con una opportuna scelta di $\alpha$, la somma della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-1/2)^2}.$$

**Esercizio 6** Studiare la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$ della serie di funzioni

$$u(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{(t-n)^2+1};$$

determinare poi la trasformata di Fourier di $u$, giustificando il calcolo.

Calcolare $v(t) := u(t) - \frac{1}{2}u(t-1)$.

**Esercizio 7** Determinare il valore dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$u(t) := \sin t + a\sin(2t) + b\sin(3t) + c\sin(4t)$$

risulti ortogonale in $\mathscr{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ alle funzioni $u(2t), u(4t)$; mostrare che per tali valori di $a, b, c$ $u$ è ortogonale alle funzioni $u(2kt)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Risolvere il medesimo problema nel caso

$$u(t) = \sin t + \sum_{n=2}^{8} b_n \sin nt$$

richiedendo che $u$ sia ortogonale a $u(2t), u(4t), u(8t)$. Mostrare che anche $u(2t), u(4t)$ sono tra loro ortogonali.

Trovare una condizione sui coefficienti di Fourier $b_n$ di una funzione

$$v(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt$$

in modo che $v$ risulti ortogonale a tutte le funzioni del tipo $v(2kt)$ per $k \in \mathbb{N}$.

Prova *in itinere*, 31 gennaio 2001.

**Esercizio 8** Determinare e classificare le singolarità della funzione complessa

$$u(z) = \frac{1}{((z+1)^3 - 8)(z-1)}.$$

Calcolare l'integrale di $u$ lungo la circonferenza $\Gamma$ di centro $-2$ e raggio 2 orientata in senso antiorario.

**Esercizio 9** Per $\alpha$ reale *non intero*, sia $u_\alpha(z) := z^\alpha$ il ramo principale della potenza del numero complesso $z$ corrispondente alla scelta dell'argomento di $z$ nell'intervallo $[-\pi, \pi[$. Calcolare l'integrale di $u_\alpha$ lungo la circonferenza di centro 0 e raggio $R > 0$.
Cosa succede quando $\alpha$ è intero (relativo)?
Cosa succede se si sceglie l'argomento di $z$ nell'intervallo $[-\pi/2, 3\pi/2[$?

**Esercizio 10** Calcolare la trasformata di Laplace delle funzioni

$$H(t-a)(t-a)^2, \quad H(t)(t-a)^2, \quad H(t-a)t^2, \quad a > 0.$$

**Esercizio 11** Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $\mathscr{T}_\alpha$ il filtro che ad una funzione causale $v$ associa la soluzione $u_\alpha = \mathscr{T}_\alpha[v]$ dell'equazione integro-differenziale

$$\tfrac{d}{dt}u_\alpha(t) + u_\alpha(t) + \alpha e^t \int_0^t e^{-x} u_\alpha(x)\,dx = v(t) \quad \text{per } t > 0; \quad u(t) \equiv 0 \text{ per } t \leq 0.$$

Si esprima $\mathscr{T}_\alpha[v]$ come convoluzione di $v$ con una distribuzione causale e si calcoli quest'ultima in funzione del parametro $\alpha$.
Si calcoli $\mathscr{T}_1[H(t-3)]$.
Per quali valori di $\alpha$ il filtro è stabile nella norma di $L^\infty(\mathbb{R})$?

**Esercizio 12** Calcolare la trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$\text{v.p.}\,\frac{\sin(t-\pi/4)}{t}, \quad \text{v.p.}\,\frac{\sin t}{t-\pi/4}$$

**Esercizio 13** Per quali valori *complessi* di $\alpha \in \mathbb{C}$ la funzione $e^{\pi\alpha t^2}$ è trasformabile secondo Fourier?
Posto $u(t) := e^{\pi i t^2}$, calcolare $u'(t)$ e scrivere un'equazione differenziale del primo ordine soddisfatta da $u$. Determinare la trasformata di Fourier di $u$ a meno di una costante moltiplicativa $c$.
Sfruttando i legami tra trasformata e trasformata coniugata, mostrare che $|c| = 1$.
Calcolare $c$.

**Esercizio 14** Calcolare la trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|}\delta(t-n), \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n\delta(t-n), \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t-2n).$$

Per $N$ fissato, sia $w := e^{2\pi i/N}$. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w^n\delta(t-n).$$

**Esercizio 15** Calcolare

$$\cos t \cdot \delta''(t-\alpha), \quad \cos t * \delta''(t-\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Risolvere il problema di divisione nell'incognita $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$(t^2-1)u(t) = \delta(t) + \delta(t-1).$$

**Esercizio 16** Calcolare i seguenti limiti nel senso delle distribuzioni

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \frac{1-\cos nt}{nt^2}, \qquad \lim_{n\uparrow+\infty} n\Big(\delta(t-1/n) - \delta(t+5/n)\Big),$$
$$\lim_{n\uparrow+\infty} n\cos^2 nt.$$

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 7 febbraio 2001.

**Esercizio 17** [4 punti] Determinare e classificare le singolarità delle funzioni di variabile complessa

$$u(z) := \frac{e^{iz^2}}{(z^2+4i)}, \quad v(z) := \frac{(z^2-1)}{(z+i)^2}.$$

**Esercizio 18** [3 punti] Sia

$$u_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{int},$$

Calcolare lo sviluppo di $u$ in serie di soli coseni e l'integrale

$$\int_0^{4\pi} |u_N(t)|^2 \, dt.$$

**Esercizio 19** [4 punti] Calcolare le antitrasformate di Laplace di

$$\mathcal{U}(s) := (s-1)^4, \quad \mathcal{V}(s) := \frac{d}{ds}\Big(e^{-4s}\frac{s^2}{s^2-2s+2}\Big).$$

**Esercizio 20** [3 punti] Verificare che le funzioni $u_n(t) := \operatorname{sinc}(2t)e^{4\pi int}$, $n = 0, 1, \ldots$, sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$ e calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \operatorname{sinc}(2t)e^{4\pi int} \right|^2 dt.$$

**Esercizio 21** [2 punti] Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni

$$\lim_{n\uparrow+\infty} n^2\, t\, \delta(2nt-1).$$

(Attenzione al cambiamento di variabile all'interno della $\delta$ !)

**Esercizio 22** [2 punti] Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \frac{1}{2-e^{int}}.$$

**Esercizio 23** [2 punti] Sia $\mathscr{T}$ il filtro lineare causale che sulle funzioni causali $u$ è definito da

$$\mathscr{T}[u] := 2u(t) + \int_0^t e^{x/2}u(t-x)\, dx, \quad t > 0;$$

Trovare le distribuzioni $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ tali che

$$\mathscr{T}[u_1] = \delta(t), \quad \mathscr{T}[u_2] = v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \chi_{(n,n+1)}(t).$$

Si consiglia di disegnare accuratamente $v$ e $H * v$, ricordando che

$$\chi_{(n,n+1)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \le t \le n+1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Esercizio 24** [2 punti] Trovare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^{-\frac{t^2}{2}} * u = \lambda u$$

ammette almeno una soluzione distribuzionale $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ non nulla. Per tali valori di $\lambda$ determinare poi tutte le soluzioni.

**Esercizio 25** [2 punti] Per $\alpha > 0$ sia $u_\alpha(t) := \log(1 - e^{-\alpha + 2\pi i t})$, dove log indica il ramo principale della funzione logaritmo. Mostrare che $u_\alpha$ è una funzione di classe $C^\infty$ e, ricordando lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo intorno al punto 1, scriverne lo sviluppo in serie di Fourier. Dedurre la trasformata di Fourier $\hat{u}_\alpha$ di $u_\alpha$; scrivere $\hat{u}_\alpha(f)$ come prodotto della forma

$$\hat{u}_\alpha(f) = v_\alpha(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(f - n).$$

Cosa succede quando $\alpha$ tende a 0? Dedurre formalmente la trasformata di Fourier della distribuzione

$$\text{v.p.}\, \frac{1}{1 - e^{2\pi i t}}.$$

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 21 febbraio 2001.

**Esercizio 26** [4 punti] Calcolare le trasformate di Fourier di

$$u(t) := \sin^2(t-1), \quad v(t) := (t^2-1) * \mathrm{rect}(t).$$

**Esercizio 27** [4 punti] Calcolare i prodotti di convoluzione

$$u := \mathrm{sinc}(t-\alpha) * \mathrm{sinc}(t+\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad v := \delta'(t) * e^{-|t|} * \mathrm{rect}(t).$$

**Esercizio 28** [4 punti] Dire se le seguenti funzioni appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, a $L^2(\mathbb{R})$ e a $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$u(t) := \mathrm{sinc}(t-1)\,\mathrm{sinc}(t+1), \quad v(t) := \frac{1}{\sqrt{|t^2-1|}}, \quad w(t) := H(t)e^{2t}.$$

Quali di esse ammettono un prolungamento analitico a tutto il piano complesso? [1 punto]

**Esercizio 29** [3 punti] Calcolare le seguenti distribuzioni

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big[\big(H(t)-H(t-2)\big)(t^2-t-2)\Big], \quad \frac{1-\cos 2\pi t}{t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta'(t-k).$$

**Esercizio 30** [3 punti] Determinare le soluzioni causali e Laplace trasformabili $u$ dell'equazione di convoluzione

$$u'(t) * u(t-1) = H(t-2)(t-2).$$

**Esercizio 31** [3 punti] Calcolare con metodi di analisi complessa l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5-4\cos t}\,dt, \quad n \geq 0.$$

Dedurne lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni

$$u(t) := \frac{1}{5-4\cos t}, \quad v(t) := \frac{4\sin t}{(5-4\cos t)^2}.$$

**Esercizio 32** [3 punti] Calcolare, per $n \uparrow +\infty$ i limiti nel senso delle distribuzioni delle seguenti successioni di distribuzioni

$$\frac{n}{nt+i}, \quad n^{-1}\left|\frac{n}{nt+i}\right|^2, \quad n\Big(\log|t+1/n| - \log|t|\Big).$$

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 20 aprile 2001.

**Esercizio 33** [4 punti] Sia $\Gamma$ il triangolo nel piano complesso $\mathbb{C}$ di vertici $-2-i, -4-4i, -4i$ orientato in senso antiorario. Calcolare l'integrale complesso

$$\oint_\Gamma \frac{z^{3/2}}{z^2+4z+16}\,dz, \quad \text{dove } z^{3/2} \text{ indica il ramo principale della potenza complessa.}$$

**Esercizio 34** [4 punti] Determinare *a priori* se i segnali causali $u$ e $v$, le cui trasformate di Laplace sono rispettivamente

$$\mathcal{U}(s) := \frac{s^2}{(s-1)^2}, \quad \mathcal{V}(s) := \frac{\log s}{s^2},$$

sono funzioni o distribuzioni. Calcolare poi $u$ e $v$.

**Esercizio 35** [4 punti] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$u(t) := \begin{cases} -1 & \text{se } t \le -2, \\ t & \text{se } -2 \le t \le 2, \\ 1 & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

discutendo in quale senso essa debba essere intesa.

**Esercizio 36** [3 punti] Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni delle successioni di funzioni

$$u_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t < -\frac{1}{n} \text{ o } t > \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}; \end{cases} \quad v_n(t) := \frac{\chi_{(1/2n,1/n)}(t)}{t},$$

al tendere di $n$ a $+\infty$. (Si consiglia un disegno accurato delle funzioni).

***Facoltativo***[1 punto]: Dedurre il limite della successione

$$w_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t < -\frac{1}{n} \text{ o } t > \frac{1}{2n}; \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

**Esercizio 37** [3 punti] Calcolare, giustificando il procedimento, la trasformata di Fourier della distribuzione

$$u(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2n\pi/3) e^{2\pi i n t}$$

Mostrare poi che $u$ è un segnale discreto della forma

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \delta(t - n/T)$$

determinando il valore di $T$ e dei coefficienti $u_n$.

**Esercizio 38** [3 punti] Calcolare lo sviluppo in serie della funzione 1 sull'intervallo $(0,\pi)$ rispetto al sistema ortonormale delle autofunzioni dell'operatore differenziale

$$\mathcal{A}u := -u'' \quad \text{soggetto alle condizioni ai limiti } u(0) = 0,\ u'(\pi) = 0.$$

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 25 giugno 2001.

**Esercizio 39** [4 punti] Calcolare le trasformate di Fourier di

$$u(t) := e^{i\pi(t^2+t+1)}, \quad v(t) := \text{v.p.}\,\frac{\sin \pi t}{i\pi^2 t^2}.$$

**Esercizio 40** [4 punti] Calcolare le seguenti distribuzioni:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{Im}\, e^{t-i|t-1|}, \quad t\log(t^2) * \delta'''(t-1) * H(t+1)$$

**Esercizio 41** [4 punti] Classificare le singolarità e calcolare i relativi residui delle funzioni di variabile complessa

$$u(z) := \frac{z-\pi}{(\sin z)^2}, \quad v(z) := e^{\frac{1}{z-1}} + z^5 \sin\frac{1}{z^2}.$$

**Esercizio 42** [3 punti] Determinare le soluzioni causali e Laplace trasformabili $u$ dell'equazione di convoluzione (attenzione: precisione nei calcoli!)

$$\big(\delta'(t) - \delta(t-\pi)\big) * \big(\delta(t) - H(t-\pi)\big) * u = \delta(t) + 2H(t-\pi)\cos(t) - \chi_{(0,2\pi)}(t)\sin t.$$

**Esercizio 43** [3 punti] Discutere l'esistenza dei seguenti integrali (nel senso di Lebesgue o del valor principale) e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{(it-\pi)}\,dt, \quad \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi+|n|} e^{2int}\Big)\,dt.$$

**Esercizio 44** [3 punti] Calcolare l'errore nella norma $L^2(\mathbb{R})$ che si commette campionando il segnale $u(t) = \operatorname{sinc} 2t$ a passo 1.

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 9 luglio 2001.

**Esercizio 45** [4 punti] Calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(t) := \text{v.p.}\,\frac{\cos \pi t}{i\pi(t-1)}.$$

**Esercizio 46** [4 punti] Calcolare la derivata distribuzionale e lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$v(t) := \log(e^{i\pi t})$$

dove log indica il ramo principale della funzione logaritmo in campo complesso.

**Esercizio 47** [4 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{(t-\pi)(t-i\pi)}\,dt$$

precisando se esso va inteso nel senso di Lebesgue o nel senso del valor principale.

**Esercizio 48** [3 punti] Calcolare la trasformata di Laplace (quando essa esiste) delle funzioni

$$u(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} H(t)\frac{t^n}{n!}, \quad v(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} H(t-n)\frac{(t-n)^n}{n!}, \quad w(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} (H(t)-H(t-1))t^n.$$

**Esercizio 49** [3 punti] Determinare quali condizioni devono soddisfare $\hat{u}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ perchè l'equazione di convoluzione

$$u * \sin(\pi t) = \sin(\alpha\pi t)$$

abbia una soluzione $u \in L^1(\mathbb{R})$.

**Esercizio 50** [3 punti] Determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$u(t) := \operatorname{sinc}^2 t, \quad v(t) := e^{i\beta t} \operatorname{sinc} t$$

sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$.

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 3 settembre 2001.

**Esercizio 51** [4 punti] Calcolare il prodotto di convoluzione

$$u(t) := \big(\delta(t-1) - \delta(t+1)\big) * \big(\delta(t-2) - \delta(t+2)\big) * \big(\delta(t-3) - \delta(t+3)\big).$$

**Esercizio 52** [4 punti] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$v(t) := \sin(2\pi t)\sin(4\pi t)\sin(6\pi t).$$

**Esercizio 53** [4 punti] Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$\mathcal{U}(s) := \frac{e^{-s}(s-1)}{s^3 + s^2 + s + 1}.$$

**Esercizio 54** [3 punti] Calcolare l'integrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(t^2 - \pi^2)}\, dt.$$

**Esercizio 55** [2 punti] Calcolare il prodotto di convoluzione

$$e^{it} * \frac{1}{1+t^2}.$$

**Esercizio 56** [2 punti] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$u(t) := \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{it}}.$$

**Esercizio 57** [2 punti] Dimostrare la convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ della serie di funzioni

$$u(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \big(-\tfrac{1}{2}\big)^n \operatorname{sinc}(2^{-n}t),$$

e calcolare la norma di $u$ in tale spazio.

Prova scritta di *Metodi matematici per l'ingegneria*, 17 settembre 2001.

**Esercizio 58** [4 punti] Calcolare i prodotti di convoluzione

$$u(t) := \delta''(t) * (|t-2| + |t+2|), \quad v(t) := H(t)e^{2t} * H(t)e^{2t} * H(t)e^{2t} * H(t)e^{2t} * H(t)e^{2t}.$$

**Esercizio 59** [4 punti] Risolvere in ambito distribuzionale i problemi di divisione

$$(t-1)^2 u(t) = \delta(t+1), \quad (t-1)^2 v(t) = \delta(t-1).$$

**Esercizio 60** [4 punti] Scrivere il problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} u'''(t) - 2u''(t) + u'(t) - 2u(t) = 0 & t > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 1 \end{cases}$$

come equazione di convoluzione e calcolarne la soluzione $u$; esprimere poi tramite un opportuno integrale la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} v'''(t) - 2v''(t) + v'(t) - 2v(t) = f(t) & t > 0, \\ v(0) = v'(0) = v''(0) = 0 \end{cases}$$

dipendente da una generica funzione continua $f$.

**Esercizio 61** [3 punti] Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni 1 periodiche che nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$ valgono

$$u(t) := \sin t, \quad v(t) := \cos t.$$

**Esercizio 62** [2 punti] Determinare tutte le soluzioni $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dell'equazione

$$\mathrm{rect}(t) * u = 0.$$

**Esercizio 63** [2 punti] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$u(t) := \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i t}}.$$

**Esercizio 64** [2 punti] Dimostrare la convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ della serie di funzioni

$$u(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n e^{2\pi i n t} \operatorname{sinc} t$$

e calcolare la norma di $u$ in tale spazio.