

Prova scritta, 8 febbraio 1999.

Esercizio 1 [12 PUNTI] Sia $f \in \mathcal{S}'_T$ una distribuzione T -periodica e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un numero complesso assegnato. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni $u \in \mathcal{S}'_T$ dell'equazione

$$\frac{d}{dt}u - \lambda u = f$$

calcolandone i coefficienti di Fourier in funzione di quelli di f . Applicare il risultato al caso

$$f_1(t) = (\cos t)^2, \quad f_2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k), \quad \text{per } \lambda = i.$$

(*) **Facoltativo** Discutere la regolarità delle soluzioni trovate.

Esercizio 2 [12 PUNTI] Sia $f_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-1} \chi_{(0, \varepsilon)}(t)$ e u_ε la funzione regolare che risolve l'equazione

$$u'_\varepsilon(t) + 2u_\varepsilon(t) - 8 \int_0^t u_\varepsilon(s) ds = f_\varepsilon(t), \quad u_\varepsilon(0) = 0.$$

Posto $U_\varepsilon(t) := H(t)u_\varepsilon(t)$, si determini il limite

$$U_0(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} U_\varepsilon(t) \quad \text{nel senso delle distribuzioni.}$$

Verificare infine che $U_\varepsilon = U_0 * f_\varepsilon$.

Esercizio 3 [12 PUNTI] Indicando con p.f. $\frac{1}{\xi^2}$ la distribuzione

$$\text{p.f. } \frac{1}{\xi^2} := -\frac{d}{d\xi} \left(\text{v.p. } \frac{1}{\xi} \right),$$

si calcoli la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$|2t - 1|, \quad H(-t)(t - 1/2), \quad H(t)te^{-2\pi\varepsilon t}$$

precisando per quali valori di $\varepsilon \in \mathbb{C}$ ha senso la domanda. Finalmente, posto

$$f_\varepsilon(\xi) := \frac{1}{(\xi - i\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

si utilizzi l'ultimo risultato per calcolare il limite $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(\xi)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Prova scritta, 23 febbraio 1999.

Esercizio 4 [14 PUNTI] Per $T > 0$ si consideri il “pettine di Dirac” $\tilde{\delta}_T$ di passo T

$$\tilde{\delta}_T(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT).$$

1. Calcolare il limite

$$\lim_{T \uparrow +\infty} \tilde{\delta}_T$$

nel senso delle distribuzioni di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. (*) **Facoltativo** Verificare che tale limite sussiste anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
3. Applicare il risultato dei punti 1. e 2. e la trasformata di Fourier per calcolare

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \tilde{\delta}_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

4. Sia ora $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ un segnale a decrescenza rapida e sia

$$f_\varepsilon(t) := \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\varepsilon) \delta(t - k\varepsilon)$$

il segnale ottenuto campionando f a passo $\varepsilon > 0$. Calcolare il limite $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon f_\varepsilon$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5. Finalmente, sia

$$g_\varepsilon(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\varepsilon) e^{-(t/\varepsilon - k)^2}.$$

Scrivere g_ε come convoluzione di f_ε con una opportuna funzione h_ε ; supponendo di poter “scambiare l’operazione di limite con quella di convoluzione” calcolare il limite $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_\varepsilon$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 [12 PUNTI] Sia $\alpha \in (0, 1]$ e si indichi con z^α la determinazione principale dell’elevamento a potenza in campo complesso corrispondente alla scelta dell’argomento di z in $(-\pi, \pi)$. Posto

$$f_\varepsilon(t) := \frac{1}{(t + i\varepsilon)^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \neq 0,$$

calcolare la trasformata di Fourier di f_ε . Discutere poi, in funzione del parametro α , l’esistenza in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ del limite di f_ε quando ε tende a 0 da destra e calcolare tale limite quando esiste. Cosa cambia nel limite da sinistra?

Esercizio 6 [14 PUNTI] Sia \mathcal{T} la trasformazione lineare (filtro) definita in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ che ad ogni segnale causale d’ingresso f associa la distribuzione $u = \mathcal{T}(f) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ soluzione dell’equazione

$$u + H(t)e^t * u = f.$$

1. Calcolare $E := \mathcal{T}(\delta_0)$ e la sua trasformata di Laplace $\mathcal{E} = \mathcal{L}(E)$.
2. Mostrare che $|\mathcal{E}(p)| < 1$ se $\operatorname{Re} p > 1/2$.
3. Si consideri poi la successione di segnali f_n costruiti nel modo seguente: si parte da un segnale in ingresso $f_0 \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ e si chiama f_1 l’uscita $\mathcal{T}(f_0)$; si riprende f_1 come nuovo ingresso e si chiama f_2 l’uscita $\mathcal{T}(f_1)$. Iterando il procedimento si ottiene una successione di segnali f_n che soddisfano la relazione ricorrente $f_{n+1} = \mathcal{T}(f_n)$. Si esprima f_n come convoluzione a partire da f_0 .
4. Dopo aver calcolato $\mathcal{F}_n := \mathcal{L}(f_n)$, si trovi il limite puntuale di $\mathcal{F}_n(p)$ e il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{in } \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}).$$

Prova scritta, 29 marzo 1999.

Esercizio 7 [12 PUNTI] Per $\varepsilon > 0$ sia u_ε la distribuzione

$$u_\varepsilon := \frac{1}{2}(\delta(t + \varepsilon) - \delta(t - \varepsilon))$$

e si consideri $u_\varepsilon^{(1)} := u_\varepsilon$, $u_\varepsilon^{(2)} = u_\varepsilon * u_\varepsilon$, $u_\varepsilon^{(3)} = u_\varepsilon * u_\varepsilon * u_\varepsilon$, \dots ,

$$u_\varepsilon^{(n)} := \underbrace{u_\varepsilon * \dots * u_\varepsilon}_{n \text{ volte}}$$

1. Calcolare l'ampiezza del supporto di $u_\varepsilon^{(n)}$.
2. Calcolare la trasformata di Fourier di $u_\varepsilon^{(n)}$.
3. Calcolare il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (tenendo n fissato)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u_\varepsilon^{(n)}}{\varepsilon^n}.$$

4. Calcolare il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (tenendo ε fissato)

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_\varepsilon^{(n)}$$

Esercizio 8 [12 PUNTI] Si discuta l'appartenenza di

$$f(t) := \frac{1 - \cos(\pi t)}{t}$$

a $L^1(\mathbb{R})$ e a $L^2(\mathbb{R})$ e se ne calcoli la trasformata di Fourier. Fissato poi $\alpha > 0$ si consideri, per $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(t) := f(t)e^{2\pi \alpha n i t}.$$

Stabilire per quali valori di α l'insieme $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è ortogonale in $L^2(\mathbb{R})$ (si consiglia di usare la trasformata di Fourier). Calcolare i coefficienti c_n , $n \in \mathbb{Z}$, in modo che l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \operatorname{sinc} t - \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f_n(t) \right|^2 dt$$

sia minimo; calcolare tale minimo e concludere che il sistema $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ non è completo in $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 9 [12 PUNTI] Calcolare, per $x \neq 0$, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-i)^2(x+it)} dt.$$

Cosa succede per $x = 0$?

Prova scritta, 29 giugno 1999.

Esercizio 10 [14 PUNTI] Per $n \in \mathbb{N}$ sia u_n la funzione reale definita in \mathbb{R} da

$$u_n(t) := \begin{cases} t^2 & \text{se } |t| \leq n, \\ n^2 & \text{se } |t| > n. \end{cases}$$

1. Calcolare u'_n, u''_n, u'''_n nel senso delle distribuzioni.
2. Calcolare il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di u'''_n , al tendere di n a $+\infty$.
3. Calcolare la trasformata di Fourier \hat{u}_n di u_n .
4. Calcolare il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ di \hat{u}_n , al tendere di n a $+\infty$.

Esercizio 11 [12 PUNTI] Per $n \in \mathbb{N}$ sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $]2n\pi, 2(n+1)\pi[$ e sia

$$f_n(t) := \chi_n(t) \sin t = \begin{cases} \sin t & \text{se } 2n\pi < t < 2(n+1)\pi, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si calcoli $g_n := f''_n + f_n$.
2. Si calcoli la trasformata di Laplace $\mathcal{F}_n(p)$ di f_n .
3. Si calcolino le serie

$$f(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(p) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n(p), \quad p \in \mathbb{C},$$

precisando l'insieme di convergenza puntuale e indicando se vi è convergenza anche rispetto ad altre nozioni conosciute (ad es. uniforme, distribuzionale, in $L^1(\mathbb{R})$, etc.).

Esercizio 12 [12 PUNTI] Sia u il segnale reale 4π -periodico, la cui restrizione all'intervallo $] -2\pi, 2\pi[$ è data da

$$u(t) := \sin |t|.$$

1. Calcolare u' e u'' nel senso delle distribuzioni.
2. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di u , precisando in quale senso esso converge a u .

Prova scritta, 14 luglio 1999.

Esercizio 13 [12 PUNTI] Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione

$$u := \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \delta(t - n).$$

Si determinino poi le *funzioni periodiche* v regolari a tratti tali che

$$\frac{d^2}{d\xi^2} v(\xi) = \hat{u}(\xi) \quad \text{nel senso delle distribuzioni}$$

e si deduca la trasformata di Fourier di

$$v_0 := \sum_{n \neq 0} n^{-1} \delta(t - n).$$

Si giustifichi infine la convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ della serie di funzioni

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n t}}{n},$$

e se ne calcoli la somma.

Esercizio 14 [12 PUNTI] Per $\rho < 1$ sia $S_\rho(t)$ la funzione 2π -periodica

$$S_\rho(t) := \log(1 + \rho e^{it}),$$

dove si è scelto il logaritmo principale in campo complesso. Verificare che S_ρ è una funzione C^∞ e calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier. Esprimere mediante un'opportuna serie la funzione della variabile $\rho \in (0, 1)$

$$\rho \mapsto \int_0^{2\pi} |S_\rho(t)|^2 dt$$

e verificare che è crescente e limitata superiormente nell'intervallo $(0, 1)$.

Esercizio 15 [12 PUNTI] Sia \mathcal{T} la trasformazione definita in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ che associa ad ogni distribuzione f l'unica soluzione $u := \mathcal{T}(f) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$u'' - 4u = f.$$

Sia \mathcal{S} la trasformazione definita in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ che associa ad ogni distribuzione g l'unica soluzione $v := \mathcal{S}(g) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$v'' + v = g.$$

Calcolare $E := \mathcal{T}(\delta)$, $F := \mathcal{S}(\delta)$ e $G := \mathcal{T}(\mathcal{S}(\delta))$. Verificare che

$$G^{(iv)} - 3G'' - 4G = \delta.$$

Calcolare finalmente la soluzione del problema di Cauchy in avanti ($t > 0$)

$$\begin{aligned} w^{(iv)}(t) - 3w''(t) - 4w(t) &= 0, \\ w(0) &= 0, \\ w'(0) &= 1, \\ w''(0) = w'''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Prova scritta, 22 settembre 1999.

Esercizio 16 [12 PUNTI] Sia f la funzione complessa definita da

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

Si mostri che f è sviluppabile in serie di potenze nell'origine e si calcoli il raggio di convergenza r della serie; decomposta f in fratti semplici, si calcolino esplicitamente i coefficienti di tale sviluppo.

Sia poi $\Gamma \subset \mathbb{C}$ la curva descritta dai punti $w \in \mathbb{C}$ tali che il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di f centrato in w è esattamente r : si descriva e si disegni Γ .

Scelta una orientazione di Γ , per $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ si calcoli l'integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Esercizio 17 [12 PUNTI] Sia u la funzione reale costante a tratti definita da

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ 2^{-n} & \text{se } t \in (n, n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Verificare se u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, calcolare la derivata di u nel senso delle distribuzioni e dedurre la trasformata di Fourier \hat{u} . Verificare che $\xi \hat{u}(\xi)$ è periodica e calcolarne il periodo T . Calcolare infine gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \int_0^T \xi^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Esercizio 18 [12 PUNTI] Per $n \in \mathbb{N}$ chiamiamo χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $(2^{-n}, 2^{-n+1})$, definita da

$$\chi_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{2^n} < t < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si considerino le funzioni reali

$$v_a(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \chi_n(t)$$

dipendenti dal parametro $a > 0$. Dire per quali valori di a la funzione v_a è trasformabile secondo Laplace, determinare il dominio della sua trasformata di Laplace \mathcal{V}_a e calcolare $\mathcal{V}_a(0)$.

Calcolare infine

$$\mathcal{V}_a(p) - \frac{a}{2} \mathcal{V}_a(p/2).$$

(Per quest'ultimo calcolo può essere d'aiuto ricordare la formula

$$u(t) \sqsupset \mathcal{U}(p) \quad \Rightarrow \quad u(\lambda t) \sqsupset \frac{1}{\lambda} \mathcal{U}(p/\lambda), \quad \text{per } \lambda > 0.)$$