

3. Spazi di Hilbert



Wir müssen wissen. Wir werden wissen.
(Noi abbiamo il dovere di conoscere.
Alla fine conosceremo.)

David Hilbert (1862-1943)

Il problema della migliore approssimazione

Problema 3.1 (Migliore approssimazione) *Sia V uno spazio funzionale, munito di una norma $\|\cdot\|$ e siano e_1, \dots, e_N assegnati elementi di V . Dato $\mathbf{u} \in V$ ci chiediamo se è possibile trovare coefficienti complessi u_1, \dots, u_N in modo da rendere minimo l'errore di approssimazione*

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{k=1}^N u_k e_k \right\| = d\left(\mathbf{u}, \sum_{k=1}^N u_k e_k\right).$$

Teorema 3.2 *Il problema 3.1 ammette sempre almeno una soluzione.*

Purtroppo il teorema precedente non indica alcun procedimento costruttivo per determinare i coefficienti u_1, \dots, u_N , e in generale il problema può essere molto complicato. C'è però un caso in cui è possibile risolvere esplicitamente il problema: quello in cui la norma può essere espressa per mezzo di un prodotto scalare.

Abbiamo già ricordato nella lezione precedente la definizione di prodotto scalare: ora richiamiamo alcune formule che ci saranno utili; prima però introduciamo la nozione fondamentale di *ortogonalità*.

Definizione 3.3 (Vettori e sistemi ortogonali) Diciamo che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ sono ortogonali se $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Analogamente, un insieme (finito o infinito) di vettori $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ forma un **sistema ortogonale** se

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) > 0; \quad n \neq m \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = 0. \quad (3.1)$$

$\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ si dice inoltre **ortonormale** se oltre alla (3.1) ogni elemento \mathbf{e}_n è un versore, cioè $\|\mathbf{e}_n\| = (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) = 1$.

Nota

Se un vettore \mathbf{u} è ortogonale a ciascun elemento di un insieme $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$, allora è ortogonale anche a tutte le combinazioni lineari $\sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n$.

Lemma 3.4 (Distanza tra due vettori) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ la distanza $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ si può esprimere per mezzo del prodotto scalare attraverso la formula

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

In particolare, se \mathbf{u} è ortogonale a \mathbf{v} si ha la formula (di "Pitagora")

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Consideriamo ora la situazione un po' più generale della combinazione lineare di N vettori.

Lemma 3.5 Per ogni scelta di N vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ in V si ha

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_N\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \mathbf{v}_n \right\|^2 = \sum_{m,n=1}^N (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n). \quad (3.2)$$

Se poi il sistema $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^N$ è ortogonale allora la precedente espressione si semplifica

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_N\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_N\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{v}_n\|^2. \quad (3.3)$$

L'idea geometrica che permette di risolvere il problema di migliore approssimazione 3.1 è molto semplice: supponiamo di conoscere già la soluzione, data dai coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$, e formiamo il vettore "errore"

$$\boldsymbol{\delta} := \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n; \quad (3.4)$$

si può intuire che $\boldsymbol{\delta}$ sia *ortogonale* a tutti i vettori generati dagli \mathbf{e}_n . Noi mostriamo che se i vettori $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ sono *linearmente indipendenti*, questa condizione di ortogonalità è sufficiente per determinare $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ e che effettivamente questi coefficienti risolvono il problema 3.1.

Richiami

Vettori linearmente indipendenti. Un insieme di vettori $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ si dice *linearmente indipendente* se ogni relazione di dipendenza lineare a coefficienti complessi

$$\sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n = 0$$

è possibile solo se i coefficienti v_n sono identicamente nulli. Quando si lavora con una *seminorma*, è utile talvolta richiedere la proprietà più forte

$$\left\| \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n \right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

In particolare, si osservi che in questo caso nessun elemento \mathbf{e}_n può essere trascurabile, cioè $\|\mathbf{e}_n\| > 0$. È facile dedurre dalla (3.3) che un *sistema ortogonale* secondo la definizione 3.3 è sempre linearmente indipendente secondo la (3.5).

Proposizione 3.6 *Se $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ è un insieme finito linearmente indipendente secondo la (3.5), per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ esiste un'unica scelta dei coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ in modo che il vettore $\boldsymbol{\delta}$ definito da (3.4) risulti ortogonale a ciascun \mathbf{e}_m :*

$$(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{e}_m) = \left(\mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \right) = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

I coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ possono essere calcolati risolvendo un sistema lineare, come indicato nel punto seguente.

Approfondimento

Il sistema lineare. Per scrivere il sistema lineare che permette di calcolare i coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$, basta sviluppare la condizione (3.6):

$$\left(\mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \right) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_m) - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = 0$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^N (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) \hat{u}_n = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_m), \quad \forall m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7)$$

Essendo $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m)$, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_m)$ dati conosciuti, abbiamo quindi N equazioni lineari nelle incognite (complesse) $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$. Introduciamo la matrice *hermitiana* $N \times N$ a coefficienti complessi

$$\mathbf{E} := \{e_{m,n}\}_{m,n=1}^N, \quad e_{m,n} := (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m), \quad e_{n,m} = \overline{e_{m,n}}$$

e i vettori *colonna* complessi in \mathbb{C}^N

$$\hat{\mathbf{u}} := \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N\}, \quad \mathbf{u} := \{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{e}_N)\}.$$

Allora la soluzione $\hat{\mathbf{u}}$ risolve il sistema in forma matriciale

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}. \quad (3.8)$$

Osserviamo che nel caso *reale*, la matrice \mathbf{E} è simmetrica, i vettori $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ sono reali.

Dimostrazione

Naturalmente rimane da dimostrare che il sistema (3.8) è effettivamente risolvibile, cioè che la matrice \mathbf{E} è invertibile. Noi mostriamo una proprietà più interessante: *la matrice \mathbf{E} è definita positiva*. Ciò significa che per ogni vettore colonna non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ si ha

$$\bar{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} > 0. \quad (3.9)$$

Naturalmente (3.9) implica l'invertibilità di \mathbf{E} , in quanto da (3.9) segue che

$$\mathbf{v} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \neq 0.$$

A sua volta la (3.9) è una conseguenza della seguente identità

$$\text{se } \mathbf{v}^T := (v_1, v_2, \dots, v_N), \quad \bar{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \|v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_N \mathbf{e}_N\|^2 \quad (3.10)$$

e della (3.5). La (3.10) si ottiene applicando (3.2):

$$\begin{aligned} \|v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_N \mathbf{e}_N\|^2 &= \sum_{m,n=1}^N (v_m \mathbf{e}_m, v_n \mathbf{e}_n) = \sum_{m,n=1}^N v_m \bar{v}_n (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{m,n=1}^N v_m \bar{v}_n (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \sum_{n=1}^N \bar{v}_n \left(\sum_{m=1}^N v_m \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \right) = \bar{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Proposizione 3.7 Sia $\mathbf{u} \in V$ e $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ un insieme finito linearmente indipendente secondo la (3.5); i coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ calcolati secondo la precedente proposizione risolvono il Problema 3.1; infatti per ogni altra scelta di coefficienti u_1, u_2, \dots, u_N si ha

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N u_n \mathbf{e}_n \right\|^2 &= \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^N (u_n - \hat{u}_n) \mathbf{e}_n \right\|^2 \\ &\geq \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\boldsymbol{\delta}\|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dimostrazione

Decomponiamo il primo termine di (3.11):

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N u_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \left\| \left(\mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right) + \sum_{n=1}^N (u_n - \hat{u}_n) \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\boldsymbol{\delta} + \sum_{n=1}^N (u_n - \hat{u}_n) \mathbf{e}_n\|^2.$$

Poiché $\boldsymbol{\delta}$ è ortogonale a ciascun \mathbf{e}_n , esso è ortogonale anche alla combinazione lineare $\sum_{n=1}^N (u_n - \hat{u}_n) \mathbf{e}_n$. Applicando la “formula di Pitagora” si conclude.

Riassumiamo il risultato fondamentale che abbiamo ottenuto nel seguente Teorema:

Teorema 3.8 Sia V uno spazio dotato di prodotto scalare e $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ un insieme finito linearmente indipendente secondo la (3.5). Allora per ogni $\mathbf{u} \in V$ il Problema di migliore approssimazione 3.1 ammette una sola soluzione $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ che è individuata dalla condizione

$$\boldsymbol{\delta} := \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{è ortogonale a tutti i vettori generati dal sistema } \{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N, \quad (3.12)$$

e può essere calcolata risolvendo il sistema lineare (3.7). Vale poi la relazione

$$d\left(\mathbf{u}, \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n\right)^2 = \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \left\| \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2. \quad (3.13)$$

Dimostrazione

L'unica proprietà che ci resta da dimostrare è la (3.13). Basta decomporre \mathbf{u} nella somma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n + \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\delta} + \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n$$

e applicare ancora una volta la “formula di Pitagora”, ricordando che $\boldsymbol{\delta}$ è ortogonale a $\sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n$.

Corollario 3.9 Quando il sistema $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ è ortogonale, la soluzione $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ del problema di migliore approssimazione assume la forma

$$\hat{u}_n = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_n)}{\|\mathbf{e}_n\|^2} \quad (3.14)$$

e la relazione (3.13) diventa

$$d\left(\mathbf{u}, \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n\right)^2 = \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N |\hat{u}_n|^2 \|\mathbf{e}_n\|^2. \quad (3.15)$$

Se infine il sistema $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^N$ è anche ortonormale, le formule precedenti si semplificano ulteriormente

$$\hat{u}_n = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_n), \quad d\left(\mathbf{u}, \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n\right)^2 = \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N |\hat{u}_n|^2. \quad (3.16)$$

Dimostrazione

Nel caso di un sistema ortogonale, la matrice \mathbf{E} è diagonale e il sistema si riduce a

$$\|\mathbf{e}_m\|^2 \hat{u}_m = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_m), \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

da cui la (3.14). (3.15) segue da (3.13) e da (3.3).

Applicazione

Minimi quadrati. Supponiamo di essere interessati a rappresentare i risultati di un certo esperimento u tramite una combinazione lineare di “funzioni di forma” assegnate $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$; possiamo pensare u e ϕ_n definite su un certo insieme E e di conoscere i risultati dell’esperimento in un numero finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_J\}$ di E , cioè di conoscere i valori $u_j := u(x_j)$, $j = 1, \dots, J$; vorremmo determinare i coefficienti $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ in modo da rappresentare u mediante la combinazione lineare $\sum_{n=1}^N \hat{u}_n \phi_n$. In pratica succede che gli esperimenti x_1, x_2, \dots, x_J sono *molti di più delle funzioni di forma* e se volessimo scrivere un sistema lineare

$$u_j = \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \phi_n(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, J$$

questo risulterebbe sovradeterminato ($J \gg N$). L’approccio a questo problema mediante il metodo dei minimi quadrati consiste nello scegliere dei pesi $\sigma_j > 0$ da assegnare a ciascun esperimento (quando nessuno sia privilegiato rispetto agli altri si ha $\sigma_j \equiv 1$) e di cercare i coefficienti \hat{u}_n in modo che risulti minimo l’errore

$$\sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2} \left| u_j - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \phi_n(x_j) \right|^2 \quad (3.17)$$

Stiamo dunque risolvendo il problema di migliore approssimazione 3.1 nello spazio $\mathbb{F}(E)$ rispetto alla seminorma

$$\|v\|^2 := \sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2} |v(x_j)|^2$$

Infatti quando si sceglie $v := u - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \phi_n$ si ottiene proprio l’espressione (3.17) da minimizzare rispetto alla scelta dei coefficienti \hat{u}_n .

È facile vedere che la seminorma introdotta discende dal prodotto scalare reale

$$(v, w) := \sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2} v(x_j) w(x_j), \quad \text{in modo che } \|g\|^2 = (g, g).$$

Se supponiamo che le funzioni ϕ_n formino un sistema linearmente indipendente sui punti scelti x_j (in modo cioè che nessuna delle ϕ possa essere scritta come combinazione lineare delle altre: si tratta di un’ipotesi ragionevole poichè abbiamo già osservato che i punti x_j sono molti di più delle funzioni di forma) si può applicare il Teorema 3.8, ottenendo per il vettore dei coefficienti $\hat{\mathbf{u}}$ il sistema lineare

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u},$$

dove la matrice reale simmetrica e definita positiva $E = \{e_{m,n}\}_{m,n=1}^N$ è definita da

$$e_{m,n} := (\phi_n, \phi_m) = \sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2} \phi_n(x_j) \phi_m(x_j)$$

mentre il vettore dei dati $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N\}$ è costruito mediante le formule

$$u_n := (u, \phi_n) = \sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2} u(x_j) \phi_n(x_j).$$

Decomposizione rispetto ad un sistema ortogonale completo

Consideriamo ora uno spazio funzionale V di dimensione infinita dotato di prodotto scalare (\cdot, \cdot) e supponiamo di conoscere un sistema ortogonale di vettori $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ secondo la definizione 3.3.

Problema 3.10 (Decomposizione ortogonale) *Dato un elemento \mathbf{u} di V ci chiediamo se è possibile determinare una successione di coefficienti complessi $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che*

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{cioè} \quad \lim_{N \uparrow +\infty} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\| = 0.$$

Proposizione 3.11 *La soluzione del problema 3.10, se esiste, è necessariamente data dai coefficienti trovati in (3.14)*

$$\hat{u}_n := \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_n)}{\|\mathbf{e}_n\|^2}. \quad (3.18)$$

Dimostrazione

Basta osservare che, per la (2.21), si può scambiare l'ordine tra serie e prodotto scalare, cioè

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n \quad \text{in } V \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}). \quad (3.19)$$

In particolare

$$(\mathbf{u}, \mathbf{e}_m) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\hat{u}_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \hat{u}_m (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_m).$$

Definizione 3.12 (Coefficienti di Fourier) *I coefficienti \hat{u}_n definiti dalla (3.18) si chiamano coefficienti di Fourier di \mathbf{u} rispetto al sistema ortogonale $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

A questo punto il Problema 3.10 si riduce ai due seguenti:

1. Trovare condizioni per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{converge in } V;$$

2. Trovare condizioni per cui la somma della serie coincide con \mathbf{u} .

Cominciamo dal primo:

Convergenza di serie di vettori ortogonali

Proposizione 3.13 Se $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n$ è una serie convergente formata da vettori ortogonali in V , vale l'identità fondamentale

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\|^2. \quad (3.20)$$

Dimostrazione Si sfruttano la continuità della norma la (3.3)

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \left\| \lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \right\|^2 = \lim_{N \uparrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \right\|^2 = \lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{u}_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

La (3.20) fornisce una condizione *necessaria* perché una serie di vettori ortogonali $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n$ converga in V , cioè che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\|^2 < +\infty. \quad (3.21)$$

Quando gli \mathbf{u}_n sono costruiti a partire dai coefficienti di Fourier di un elemento \mathbf{u} , questa condizione è sempre verificata grazie alla disuguaglianza di Bessel (3.15), che ci fornisce un'informazione fondamentale circa il loro andamento asintotico:

Teorema 3.14 (Disuguaglianza di Bessel) Se \hat{u}_n sono i coefficienti di Fourier di \mathbf{u} rispetto al sistema ortogonale $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\hat{u}_n|^2 \|\mathbf{e}_n\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 < +\infty.$$

Nella formula precedente l'uguaglianza vale se e solo se il problema 3.10 ha soluzione.

Dimostrazione Basta passare al limite per $N \uparrow +\infty$ in (3.15); l'ultima osservazione segue dalla formula (3.20).

Se lo spazio V è completo, la condizione (3.21) è anche *sufficiente* e quindi la disuguaglianza di Bessel assicura automaticamente la convergenza delle serie di Fourier in V .

Teorema 3.15 Supponiamo che $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sia un insieme di vettori ortogonali. Se V è completo, allora

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n \text{ converge in } V \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\|^2 < +\infty.$$

Definizione 3.16 (Spazi di Hilbert) Uno spazio funzionale V dotato di prodotto scalare e completo si dice spazio di Hilbert.

Dimostrazione La necessità della condizione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^2 < +\infty$$

segue dalla (3.20).

Per la sufficienza, basta controllare che la successione delle somme parziali

$$s_N := \sum_{n=1}^N f_n \mathbf{e}_n$$

è una successione di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^2 \quad \text{converge}$$

è possibile trovare \bar{N} in modo che

$$\sum_{n=\bar{N}}^{+\infty} |f_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Dico che se $\bar{N} \leq N < M$ allora

$$\|s_N - s_M\| \leq \varepsilon; \quad \text{ciò mostra appunto che } s_N \text{ è di Cauchy.}$$

Per controllare quest'ultima affermazione, notiamo che

$$s_N - s_M = \sum_{n=N+1}^M f_n \mathbf{e}_n;$$

Per il Teorema di Pitagora, essendo i vettori $f_n \mathbf{e}_n$ mutuamente ortogonali, si ha

$$\|s_N - s_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |f_n|^2 \leq \sum_{n=\bar{N}}^{+\infty} |f_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Corollario 3.17 *Se \hat{u}_n sono i coefficienti di Fourier di \mathbf{u} rispetto al sistema ortogonale $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ nello spazio di Hilbert V , la serie di Fourier*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{è convergente e} \quad \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} |\hat{u}_n|^2 \|\mathbf{e}_n\|^2.$$

Sistemi ortogonali completi.

Definizione 3.18 (Sistemi ortogonali completi) *Un sistema ortogonale $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ si dice completo in V se ogni elemento \mathbf{u} di V che è ortogonale a ciascun \mathbf{e}_n è trascurabile, cioè altri termini*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{e}_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{u}\| = 0.$$

Teorema 3.19 (Decomposizione e identità di Parseval) *Se V è uno spazio di Hilbert e il sistema ortogonale $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo allora il problema di decomposizione ortogonale 3.10 si può sempre risolvere. In particolare, per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha*

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{in } V, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\hat{u}_n|^2 \|\mathbf{e}_n\|^2,$$

dove \hat{u}_n sono i coefficienti di Fourier di \mathbf{u} dati dalla (3.18).

Dimostrazione

Sappiamo già che la serie di Fourier converge; basta mostrare che la differenza

$$\boldsymbol{\delta} := \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \mathbf{e}_n \quad \text{è trascurabile.}$$

Osserviamo che

$$(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{e}_m) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_m) - \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_m) - \hat{u}_m \|\mathbf{e}_m\|^2 = 0.$$

Siccome il sistema $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo, si conclude che $\boldsymbol{\delta}$ è trascurabile.

Proposizione 3.20 (Calcolo del prodotto scalare) *Nelle ipotesi del Teorema precedente, se $\{\hat{u}_n, \hat{v}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sono i coefficienti di Fourier di due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} rispettivamente, si ha*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{u}_n \overline{\hat{v}_n} \quad (3.22)$$

Proposizione 3.21 (Stima dell'errore) *Nelle ipotesi del teorema precedente, l'errore tra \mathbf{u} e la somma dei primi N termini della serie di Fourier si può stimare nel modo seguente:*

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\hat{u}_n|^2 \|\mathbf{e}_n\|^2. \quad (3.23)$$