

2. Spazi di funzioni



Stefan Banach (1892-1945)

Definizione 2.1 (Spazi funzionali) Consideriamo un sottoinsieme E dello spazio euclideo \mathbb{R}^d . Indichiamo con $\mathbb{F}(E)$ l'insieme di tutte le funzioni definite in E a valori complessi. $\mathbb{F}(E)$ è **uno spazio vettoriale sul campo complesso**. Diciamo che V è uno spazio funzionale (su E) se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{F}(E)$.

Nota

Tutto quello che diremo in generale in questa lezione per uno spazio funzionale V vale generalmente per un *qualsiasi* spazio vettoriale sul corpo complesso. Noi adotteremo frequentemente il termine più restrittivo di *spazio funzionale*, perchè vogliamo sottolineare che il nostro obiettivo è quello di descrivere spazi di questo tipo. Quando penseremo agli elementi dello spazio V solo come *vettori* useremo le lettere in grassetto $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$; quando vorremo sottolineare che si tratta anche di funzioni definite in E torneremo ad usare le lettere in corpo normale u, v, w, \dots

Richiami

Operazioni in uno spazio vettoriale. Se u, v sono due funzioni di $\mathbb{F}(E)$ allora la funzione somma $w := u + v$ è quella ovviamente definita da

$$w(x) := u(x) + v(x) \quad \text{per ogni } x \in E.$$

Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{C}$ è uno scalare complesso, la funzione $l := \lambda u$ è definita da

$$l(x) := \lambda u(x) \quad \text{per ogni } x \in E.$$

Dire che V è un sottospazio di $\mathbb{F}(E)$ significa che queste operazioni, fatte a partire da elementi u, v in V non fanno uscire da V .

Esempi

E.1 Quando $E := (-\infty, +\infty)$ e la variabile in E è pensata come tempo, $\mathbb{F}(-\infty, +\infty)$ è lo spazio di tutti i possibili *segnali* temporali.

E.2 Se consideriamo solo segnali temporali nulli prima dell'istante $t = 0$ (*i segnali causali*) otteniamo un *sottospazio* di $\mathbb{F}(-\infty, +\infty)$,

$$V = \mathbb{F}_+(-\infty, +\infty) := \{u \in \mathbb{F}(-\infty, +\infty) : u(t) \equiv 0 \quad \text{per } t < 0\}.$$

È facile convincersi che si tratta ancora di uno spazio vettoriale.

E.3 Fissato un periodo di tempo $T > 0$, si può considerare un altro sottospazio importante di $\mathbb{F}(-\infty, +\infty)$, precisamente quello formato da tutti i segnali *T-periodici*; in formule

$$V = \mathbb{F}_T(-\infty, +\infty) := \{u \in \mathbb{F}(-\infty, +\infty) : u(t+T) = u(t) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)\}.$$

E.4 $E := \mathbb{Z}$ rappresenta la scelta più semplice per rappresentare un segnale discreto, cioè una funzione che dipende solo dai valori interi della variabile; in questo caso il segnale $u \in \mathbb{F}(\mathbb{Z})$ è determinato dai valori $u_n := u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

E.5 Se $E := \{nh : n \in \mathbb{Z}\}$, con $h > 0$ fissato, $\mathbb{F}(E)$ può essere adatto a rappresentare il campionamento a passo h di un segnale temporale. Si possono ripetere anche in questo caso le medesime osservazioni circa i segnali causali e periodici.

E.6 Fissato un intero N , sia $E := \{0, h, 2h, 3h, \dots, (N-1)h\}$. In questo caso un elemento u di $\mathbb{F}(E)$ è determinato da N numeri complessi $u_n := u(nh)$, $n = 0, \dots, N-1$, e può quindi essere rappresentato da un vettore di \mathbb{C}^N (\mathbb{R}^N nel caso di segnali reali). Questa rappresentazione è utile per trattare segnali discreti finiti (segnali digitali).

E.7 La distribuzione di potenziale elettrostatico in una sfera E è un elemento di $\mathbb{F}(E)$; se tale potenziale varia nel tempo, il segnale spazio-temporale associato è un elemento di $\mathbb{F}(E \times \mathbb{R})$.

E.8 Un'immagine rettangolare composta da $N \times M$ pixel può essere rappresentata associando al pixel di coordinate (n, m) un valore reale $u_{n,m} = u(n, m)$ (0 o 1 se si considera un'immagine in bianco e nero; da 0 a $k-1$ se si hanno a disposizione k toni di grigio) corrispondente allo stato di quel pixel: in questo caso $E := \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \subset \mathbb{R}^2$. In certi casi può essere utile pensare che u sia definito per tutti i valori interi, ad esempio in modo periodico oppure esteso a 0 al di fuori della griglia iniziale.

Definizione 2.2 (Trasformazioni lineari) Una trasformazione $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ tra due spazi funzionali si dice *lineare* se

$$\mathcal{T}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{T}(u) + \beta \mathcal{T}(v) \quad \forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Approfondimento

Ci si può chiedere la ragione dell'insistenza sul concetto di linearità: esso permette di esprimere un segnale per sovrapposizione di segnali più semplici; lo studio e la realizzazione effettiva di queste decomposizioni costituisce uno dei problemi più importanti che affronteremo. Schematicamente lo si può riassumere nel modo seguente: dato una successione (finita o numerabile) di segnali "elementari" e_1, \dots, e_n, \dots in uno spazio funzionale V , esprimere ogni altro segnale u di V come combinazione lineare

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots \quad (2.1)$$

mediante opportuni coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ da determinarsi.

Lo sviluppo (2.1) dovrebbe possedere i seguenti requisiti:

- Il calcolo del coefficiente α_{n+1} non comporta la modifica dei precedenti.
- L'aggiunta di un nuovo termine dovrebbe migliorare l'approssimazione di u .

- Si vorrebbe “misurare” in qualche modo l’errore che si commette se si tronca la somma dopo un numero finito di termini, riducendo l’errore al di sotto di una fissata tolleranza, pur di sommare un numero sufficiente di elementi.
- Si vorrebbe poter rappresentare “esattamente” u come serie infinita (se è necessario), senza più alcun errore, trattando poi formalmente la serie come una somma ordinaria.

Il problema di precisare le nozioni di errore, approssimazione, convergenza delle serie infinite viene risolto in modo elegante e generale dai concetti che introduciamo qui di seguito.

Definizione 2.3 ((Semi)norme in uno spazio funzionale) Una (semi)norma $\|\cdot\|$ per lo spazio funzionale V è un’applicazione definita in V a valori reali non negativi che soddisfa le seguenti proprietà:

$$(M_1) \text{ Per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

$$(M_2) \text{ Per ogni } \mathbf{u} \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|.$$

In particolare (M_2) implica che la (semi)norma della funzione nulla è 0. Chiameremo trascurabili le funzioni $u \in V$ tali che $\|u\| = 0$. $\|\cdot\|$ è una norma se l’unica funzione trascurabile è quella nulla, cioè

$$(M_3) \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = 0.$$

Uno spazio V dotato di una (semi)norma $\|\cdot\|$ si dice spazio (semi)normato. Chiamiamo (semi)distanza tra due funzioni \mathbf{u}, \mathbf{v} in V il numero

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Diremo indistinguibili (rispetto alla norma $\|\cdot\|$) due funzioni \mathbf{u}, \mathbf{v} che differiscono per una funzione trascurabile, cioè tali che $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Convenzione.

Norme e seminorme. Come appare chiaro dalla precedente definizione, l’unica differenza tra norme e seminorme consiste nella proprietà M_3 : questa proprietà risulta poi fondamentale per garantire l’unicità del limite, secondo la successiva definizione 2.4, e costituisce per questo il punto di vista privilegiato nelle usuali trattazioni di analisi funzionale. D’altra parte gli esempi più importanti di seminorme di tipo integrale (cf. (2.9)) non verificano la M_3 , a meno di non ricorrere al linguaggio delle classi di equivalenza. Noi useremo ambedue i concetti e talvolta, per non appesantire l’esposizione, parleremo di norme, spazi di Banach o di Hilbert anche quando si abbia a che fare in realtà solo con una seminorma.

Approfondimento

Proprietà della distanza. Una (semi)distanza $d(\cdot, \cdot)$ in uno spazio funzionale V è una applicazione reale definita in $V \times V$ caratterizzata dalle seguenti proprietà: (qui di seguito $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}$ sono arbitrari elementi di V)

$$(\delta_1) \text{ Positività: } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [0, +\infty).$$

$$(\delta_2) \text{ Simmetria: } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

$$(\delta_3) \text{ Disuguaglianza triangolare: } d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

$$(\delta_4) \text{ Invarianza per traslazioni: } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u} + \mathbf{h}, \mathbf{v} + \mathbf{h}).$$

$$(\delta_5) \text{ Omogeneità: } d(\lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = |\lambda| d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$(\delta_6) \text{ Se poi } d \text{ è effettivamente una distanza allora due funzioni indistinguibili sono uguali, cioè}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Definizione 2.4 (Convergenza in uno spazio funzionale (semi)normato)

Diciamo che una successione $\mathbf{u}_n \in V$ converge a \mathbf{u} rispetto alla norma $\|\cdot\|$, se

$$\lim_{n \uparrow +\infty} d(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}) = \lim_{n \uparrow +\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| = 0.$$

Analogamente diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n \quad \text{converge in } V \text{ a } \mathbf{S} \text{ se } \lim_{N \uparrow +\infty} \left\| \mathbf{S} - \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \right\| = 0.$$

Esercizio

Dimostrare che se \mathbf{u}_n converge a \mathbf{u} rispetto alla (semi)norma $\|\cdot\|$, allora

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \|\mathbf{u}_n\| = \|\mathbf{u}\|.$$

Attenzione!

Unicità del limite. Il limite di una successione in uno spazio funzionale V è *unico* se e solo se lo spazio è dotato di una *norma*; nel caso di una seminorma, se la successione \mathbf{u}_n converge a \mathbf{u} , essa converge anche a tutte le funzioni $\tilde{\mathbf{u}}$ con $\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\| = 0$. Infatti,

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \|\mathbf{u}_n - \tilde{\mathbf{u}}\| = \lim_{n \uparrow +\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \leq \lim_{n \uparrow +\infty} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|) = 0.$$

Il concetto di somma di una serie è molto importante e potremmo rileggerlo così: fissato un margine d'errore (tolleranza) $\varepsilon > 0$, siamo in grado, pur di sommare un numero $N \geq \bar{N} = \bar{N}(\varepsilon)$ sufficientemente grande di termini della serie, di approssimare la somma \mathbf{S} commettendo un errore inferiore a ε , cioè

$$\left\| \mathbf{S} - \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \right\| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq \bar{N}(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Per controllare questa proprietà però occorre conoscere a priori l'esistenza e il valore di \mathbf{S} , mentre spesso si dispone solo dei valori di \mathbf{u}_n . In questo caso risulta naturale sostituire la condizione (2.2) con la seguente nozione.

Completezza

Definizione 2.5 (Serie di Cauchy) Una successione \mathbf{u}_n in V forma una serie di Cauchy se, fissata una tolleranza $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intero $\bar{N} = \bar{N}(\varepsilon)$ tale che i contributi alla serie formati con un numero arbitrario di addendi successivi a \bar{N} sono comunque inferiori a ε ; in formule:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall N \geq M \geq \bar{N}_\varepsilon, \quad \left\| \sum_{n=M}^N \mathbf{u}_n \right\| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Definizione 2.6 (Spazi completi) Uno spazio funzionale (semi)normato V si dice completo se ogni serie di Cauchy è convergente in V . Uno spazio di Banach è uno spazio normato completo.

Un esempio particolarmente importante di serie di Cauchy è fornito dal seguente lemma:

Lemma 2.7 Supponiamo che la successione \mathbf{u}_n in V soddisfi la

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\| < +\infty. \quad (2.4)$$

Allora \mathbf{u}_n forma una serie di Cauchy.

Richiami

Resto di una serie numerica convergente.. Se a_n è una successione di numeri reali tali che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente alla somma s , allora si chiama *resto* N -esimo la quantità

$$r_N := s - \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n.$$

Per definizione stessa di convergenza della serie, si ha

$$\lim_{N \uparrow +\infty} r_N = \lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione

Basta osservare che se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\| < +\infty$$

e si fissa $\varepsilon > 0$, allora esiste $\bar{N} = \bar{N}(\varepsilon)$ tale che

$$\sum_{n=\bar{N}}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\| \leq \varepsilon.$$

In particolare la condizione (2.3) è soddisfatta, poichè se $N \geq M \geq \bar{N}$ si ha

$$\left\| \sum_{n=M}^N \mathbf{u}_n \right\| \leq \sum_{n=M}^N \|\mathbf{u}_n\| \leq \sum_{n=\bar{N}}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\| \leq \varepsilon.$$

Nota

Ogni serie *convergente* è di Cauchy ma in generale *non* soddisfa la (4.19). totalmente convergente; d'altra parte la (4.19) costituisce spesso il metodo più comodo per controllare che una serie sia di Cauchy. Vedremo che un altro caso particolarmente importante di serie di Cauchy è costituito da alcune serie di vettori ortogonali in uno spazio di Hilbert.

Teorema 2.8 (Criterio di Weierstrass “generalizzato”) V è uno spazio funzionale completo rispetto alla (semi)norma $\|\cdot\|$ se e solo se per ogni successione \mathbf{u}_n in V

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{u}_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{u}_n \quad \text{converge in } V.$$

Dimostrazione

Ogni serie totalmente convergente è di Cauchy, quindi se lo spazio è completo essa converge.

Supponiamo ora che ogni serie totalmente convergente sia convergente e mostriamo che ogni serie di Cauchy converge. Partendo dalla (2.3) scegliamo una successione di valori di ε , precisamente $\varepsilon_k := 2^{-k}$, $k \geq 1$; corrispondentemente troveremo interi $\bar{N}_k := \bar{N}(\varepsilon_k)$ per i quali, posto $N_0 := 0$,

$$\mathbf{S}_k := \sum_{n=\bar{N}_k}^{\bar{N}_{k+1}} \mathbf{u}_n \quad \text{si ha} \quad \|\mathbf{S}_k\| \leq \varepsilon_k = 2^{-k} \quad k \geq 1.$$

Evidentemente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\mathbf{S}_k\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} < +\infty \quad \text{sicché} \quad \exists \mathbf{S} := \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{S}_k.$$

È facile vedere che pure la serie iniziale converge a \mathbf{S} : fissato infatti $\varepsilon > 0$ e scelto k in modo che $\varepsilon_k < \varepsilon/2$, si ha per $N \geq \bar{N}_k$

$$\left\| \mathbf{S} - \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_n \right\| \leq \left\| \mathbf{S} - \sum_{n=0}^{\bar{N}_k} \mathbf{u}_n \right\| + \left\| \sum_{n=\bar{N}_k}^N \mathbf{u}_n \right\| \leq 2\varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Lo spazio delle funzioni integrabili

Consideriamo un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ di *misura positiva*. Un modo per valutare quanto differiscono due funzioni u, v di $\mathbb{F}(E)$ è quello di misurare l'area compresa tra i rispettivi grafici, cioè l'insieme

$$\{(x, y) : x \in E, \quad u(x) \leq y \leq v(x) \quad \text{o} \quad v(x) \leq y \leq u(x)\}.$$

Un semplice grafico mostra che questa area può essere calcolata mediante l'integrale

$$\int_E |u(x) - v(x)| dx$$

che prenderemo dunque come definizione di *distanza integrale* tra le due funzioni. Non è difficile controllare che tale distanza soddisfa le proprietà $(\delta_1, \dots, \delta_5)$ e che

$$\|u\| := d(u, 0) = \int_E |u(x)| dx$$

si comporta come una (semi)norma. Poiché vogliamo evitare il caso $\|u\| = +\infty$, è naturale restringere lo spazio $\mathbb{F}(E)$ al *sottospazio* delle funzioni integrabili. Questo nuovo spazio è così importante, che lo introduciamo con la definizione che segue.

Definizione 2.9 Se E è un insieme di \mathbb{R}^d con misura positiva, indichiamo con $\mathcal{L}^1(E)$ il sottospazio di $\mathbb{F}(E)$ formato dalle funzioni u che sono integrabili, cioè

$$u \in \mathcal{L}^1(E) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathbb{F}(E), \quad \int_E |u(x)| dx < +\infty.$$

$\mathcal{L}^1(E)$ è naturalmente dotato della (semi)norma

$$\|u\|_{\mathcal{L}^1(E)} := \int_E |u(x)| dx.$$

Attenzione!

Per il Corollario 1.19,

$$d(u, v) = \|u - v\|_{\mathcal{L}^1(E)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v \quad \text{q.o. in } E.$$

Ecco perchè abbiamo chiamato *seminorma* la funzione $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(E)}$: essa non è in grado di distinguere due funzioni, se esse coincidono q.o.

Convenzione.

Per evitare di usare le seminorme, quando si considera lo spazio $\mathcal{L}^1(E)$ generalmente si adotta la convenzione di *identificare* due funzioni integrabili, quando queste coincidono q.o. I matematici usano per questo procedimento la nozione di *classe di equivalenza*, che raggruppa gli elementi che sono *indistinguibili* dal punto di vista della norma dello spazio. In questo caso si parla dello spazio $L^1(E)$ e i “veri” elementi di $L^1(E)$ sono *classi di equivalenza di funzioni*, anziché le singole funzioni. Nel linguaggio corrente, però, si lascia sempre sottintesa questa convenzione, finendo per parlare di $L^1(E)$ come spazio di funzioni e non di classi di equivalenza di funzioni.

Dunque noi non ricorremo al linguaggio delle classi di equivalenza, ma semplicemente dovremo tener presente che la (semi)norma di $\mathcal{L}^1(E)$ non distingue due funzioni uguali q.o., e il limite nel senso di $\mathcal{L}^1(E)$ risulta quindi determinato solo a meno di insiemi di misura nulla. Quando vorremo sottolineare che la funzione u è determinata a meno di insiemi trascurabili, scriveremo $u \in L^1(E)$.

In particolare, la nozione di valore puntuale di una funzione di $\mathcal{L}^1(E)$ deve essere usata con molta cautela: è chiaro che quando noi definiamo una funzione in E , assegnamo (e quindi conosciamo) il suo valore in *ogni* punto di E . Ma quando la definizione o l'esistenza di una funzione f passa per qualche procedimento di limite in $L^1(E)$ e vogliamo che il nostro discorso sia *indipendente* dalla scelta arbitraria di un altro candidato limite \tilde{u} che coincide con u q.o. in E , non siamo più autorizzati a sfruttare il particolare valore di u in un determinato punto, ma solo proprietà puntuali che sono *invarianti* rispetto al cambiamento di u in un insieme di misura nulla.

Esempio

Supponiamo che una successione di funzioni positive u_n converga a u in $\mathcal{L}^1(0,1)$: ebbene, possiamo ancora dire che u è positiva quasi ovunque nell'intervallo $(0,1)$, ma *non* possiamo dire che $u(1/2) \geq 0$, in quanto il particolare valore di u in $1/2$ non può essere identificato dalla convergenza integrale.

Teorema 2.10 (Completezza di $\mathcal{L}^1(E)$) Se una successione $u_n \in \mathcal{L}^1(E)$ soddisfa la

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge puntualmente q.o. ed in $\mathcal{L}^1(E)$ ad una funzione S integrabile in E :

$$\lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x) = S(x) \quad \text{q.o. in } E, \quad \text{con} \quad \lim_{N \uparrow +\infty} \int_E |S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x)| dx = 0. \quad (2.5)$$

In particolare, $\mathcal{L}^1(E)$ è completo.

Dimostrazione

Basta ricordare il Teorema di integrazione per serie.

Proposizione 2.11 (Convergenza degli integrali) Se la successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a u in $\mathcal{L}^1(E)$, allora per ogni sottoinsieme $A \subset E$

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_A u_n(x) dx = \int_A u(x) dx. \quad (2.6)$$

Dimostrazione

Basta semplicemente osservare che, per la (1.27),

$$\begin{aligned} \left| \int_A u_n(x) dx - \int_A u(x) dx \right| &= \left| \int_A (u_n(x) - u(x)) dx \right| \leq \\ &\int_A |u_n(x) - u(x)| dx \leq \int_E |u_n(x) - u(x)| dx = \|u_n - u\|_{\mathcal{L}^1(E)} \end{aligned}$$

Approfondimento

Convergenza $\mathcal{L}^1(E)$ e convergenza q.o. Supponiamo di sapere che una successione di funzioni complesse u_n definite in E converga q.o., cioè

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{per q.o. } x \in E.$$

Cosa si può dire della convergenza di u_n in $\mathcal{L}^1(E)$?

- Occorre innanzitutto controllare che u_n, u appartengano a $\mathcal{L}^1(E)$, altrimenti non ha senso parlare di convergenza in $\mathcal{L}^1(E)$.
- In caso affermativo, l'unico (a meno di insiemi trascurabili...) limite possibile per la successione u_n in $\mathcal{L}^1(E)$ è la funzione u (anche se è intuitivo, si tratta di un Teorema di non banale dimostrazione!)
- Per controllare che la convergenza sia anche in $\mathcal{L}^1(E)$ vi sono sostanzialmente tre possibilità:

1. applicare direttamente la definizione e stimare in modo opportuno (per es. calcolandoli esplicitamente...) gli integrali

$$\int_E |u_n(x) - u(x)| dx \quad \text{ed il relativo limite per } n \uparrow +\infty;$$

2. controllare se le ipotesi del teorema di Beppo Levi sono soddisfatte (convergenza monotona) e controllare che il limite degli integrali sia finito (che in tal caso è una condizione *necessaria e sufficiente* per la convergenza)

3. controllare se le ipotesi del teorema di Lebesgue sono verificate (convergenza dominata): queste forniscono una condizione *sufficiente* per la convergenza in $\mathcal{L}^1(E)$.
- Nel caso di una *serie* di funzioni si applica il teorema di integrazione per serie (nel caso di funzioni positive) o il teorema 2.10.

Viceversa, se si conosce a priori la convergenza in $\mathcal{L}^1(E)$, l'unico caso in cui si può dedurre la convergenza q.o. è quello delle serie che soddisfano l'ipotesi del teorema 2.10. In generale se una successione u_n converge a u in $\mathcal{L}^1(E)$ si può solo concludere che *esiste una sottosuccessione* u_{n_k} che converge q.o. a u .

Lo spazio delle funzioni (essenzialmente) limitate.

Definizione 2.12 Chiamiamo $\mathbb{B}(E)$ lo spazio vettoriale delle funzioni complesse e limitate definite in E ; $\mathbb{B}(E)$ è uno spazio normato grazie a

$$\|u\|_{\mathbb{B}(E)} := \sup_{x \in E} |u(x)|.$$

Richiami

- Dire che una successione u_n converge a u in $\mathbb{B}(E)$ è equivalente a dire che u_n converge *uniformemente* a u .
- L'usuale Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme si può riformulare in questo modo: se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{\mathbb{B}(E)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in E} |u_n(x)| < +\infty,$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge uniformemente (e cioè in $\mathbb{B}(E)$).

- Per il teorema 2.8, $\mathbb{B}(E)$ è uno spazio *completo*.

Quando si considerano funzioni definite solo *quasi ovunque*, ad esempio perchè si è interessati solo a quantità integrali, il naturale sostituto di $\mathbb{B}(E)$ si chiama $\mathcal{L}^\infty(E)$: sostanzialmente si concede alla funzione u di “comportarsi male” purchè questo avvenga su di un insieme trascurabile; in altri termini, ridefinendo la funzione (per es. a 0) su un insieme trascurabile, siamo in grado di renderla limitata.

Definizione 2.13 (Funzioni essenzialmente limitate e $\mathcal{L}^\infty(E)$) Una funzione complessa u definita in E si dice *essenzialmente limitata* se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|u(x)| \leq M \quad \text{per q.o. } x \text{ in } E. \quad (2.7)$$

L'insieme delle funzioni essenzialmente limitate definite in E è uno spazio vettoriale che si indica con $\mathcal{L}^\infty(E)$. Se $u \in \mathcal{L}^\infty(E)$, si indica con $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ la più piccola delle costanti M che verificano la (2.7).

Attenzione!

Dire che una funzione è essenzialmente limitata è molto più restrittivo che limitata q.o.: ad esempio, la funzione $u(x) := 1/x$ q.o. definita su \mathbb{R} è limitata (=finita) q.o. ma non appartiene a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, perchè anche se la ridefiniamo 0 per $x = 0$ essa rimane illimitata su \mathbb{R} .

Teorema 2.14 L'applicazione $u \mapsto \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ è una (semi)norma in $\mathcal{L}^\infty(E)$, rispetto alla quale tale spazio risulta *completo*: $\mathcal{L}^\infty(E)$ è quindi uno spazio di Banach.

Osservazione 2.15 Se u è una funzione *regolare a tratti* (cf. la precedente lezione) definita in un intervallo $[a, b]$, allora si controlla facilmente che

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(a,b)} = \sup_{x \in [a,b]} |u(x)| = \|u\|_{\mathbb{B}(a,b)}.$$

Dunque sulle funzioni regolari a tratti la norma \mathcal{L}^∞ coincide con la norma (del "sup") di $\mathbb{B}(a, b)$; in particolare si verifica che se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni regolari a tratti, essa converge in $\mathcal{L}^\infty(a, b)$ se e solo se essa converge uniformemente ad una funzione u limitata in $[a, b]$. Ogni funzione \tilde{u} quasi ovunque uguale ad u è allora il limite della successione in $\mathcal{L}^\infty(a, b)$.

Lemma 2.16 Se $u \in \mathcal{L}^1(E)$ e $v \in \mathcal{L}^\infty(E)$, allora il prodotto uv è integrabile e

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^1(E)} = \int_E |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{\mathcal{L}^1(E)} \|v\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}.$$

Analogamente, se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono due successioni convergenti a u e v in $\mathcal{L}^1(E)$ e in $\mathcal{L}^\infty(E)$ rispettivamente, allora

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_n v_n = uv \quad \text{in } \mathcal{L}^1(E), \quad \lim_{n \uparrow +\infty} \int_E u_n(x)v_n(x) dx = \int_E u(x)v(x) dx.$$

L'integrale del prodotto di due funzioni, lo spazio $\mathcal{L}^2(E)$ e la nozione di prodotto scalare.

Il lemma 2.16 fornisce un primo elementare criterio di integrabilità del prodotto di due funzioni u, v ; ci si può chiedere se non è possibile trovare una condizione sufficiente che faccia intervenire simmetricamente le due funzioni.

La risposta sta nella seguente disuguaglianza elementare

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \quad (2.8)$$

la cui dimostrazione segue facilmente dall'identità

$$\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - 2|ab|) = \frac{1}{2}(|a| - |b|)^2 \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Corollario 2.17 Se u, v sono funzioni complesse definite in E tali che

$$\int_E |u(x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_E |v(x)|^2 dx < +\infty,$$

allora la funzione $u \cdot v$ è integrabile in E e

$$\int_E |u(x) \cdot v(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_E |u(x)|^2 dx + \int_E |v(x)|^2 dx \right) < +\infty. \quad (2.9)$$

Definizione 2.18 Se E è un insieme di \mathbb{R}^d con misura positiva, indichiamo con $\mathcal{L}^2(E)$ il sottospazio di $\mathbb{F}(E)$ formato dalle funzioni u che sono integrabili, cioè

$$u \in \mathcal{L}^2(E) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathbb{F}(E), \quad \int_E |u(x)|^2 dx < +\infty.$$

$\mathcal{L}^2(E)$ è naturalmente dotato della (semi)norma

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(E)} := \sqrt{\int_E |u(x)|^2 dx}, \quad (2.10)$$

indotta dal prodotto scalare

$$(u, v)_{\mathcal{L}^2(E)} := \int_E u(x) \cdot \overline{v(x)} dx. \quad (2.11)$$

Osserviamo che (2.11) è ben definito grazie al precedente corollario; a differenza di $\mathcal{L}^1(E)$, controllare che (2.10) è effettivamente una (semi)norma (in particolare la proprietà (M_2)) non è del tutto immediato, ma è una facile conseguenza del fatto che (2.11) è effettivamente un prodotto scalare. Ricordiamo qui di seguito la definizione generale di questa nozione fondamentale, lasciando come esercizio la verifica che (2.11) ne soddisfa tutte le proprietà formali.

Definizione 2.19 (Prodotto scalare e norma indotta) *Si chiama prodotto scalare in uno spazio funzionale V una applicazione che associa ad ogni coppia di vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} di V un numero complesso (\mathbf{u}, \mathbf{v}) con queste proprietà:*

$$\text{hermitianità} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}; \quad (2.12)$$

$$\text{sesquilinearità} \quad \begin{cases} (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{h}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{h}), \\ (\mathbf{h}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \bar{\alpha}(\mathbf{h}, \mathbf{u}) + \bar{\beta}(\mathbf{h}, \mathbf{v}), \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\text{positività} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \quad (2.14)$$

Si verifica che la funzione $\mathbf{u} \mapsto \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ è una (semi)norma su V , che si chiama (semi)norma indotta dal prodotto scalare.

Chiameremo trascurabile un elemento \mathbf{u} tale che $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

Se è soddisfatta anche la proprietà

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

cioè il solo elemento trascurabile è lo 0, allora la (semi)norma indotta è una norma in senso stretto.

Nota

Prodotti scalari a valori reali. Nel caso (\cdot, \cdot) sia un prodotto scalare reale (ad esempio quando V è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali) si parla di *simmetria* (al posto della hermitianità) e di *bilinearità* (al posto della sesquilinearità): in pratica basta omettere da tutte le formule il segno della coniugazione complessa.

Se (\cdot, \cdot) è un prodotto scalare complesso, si verifica facilmente (Esercizio!) che $\text{Re}(\cdot, \cdot)$ è un prodotto scalare reale.

Approfondiremo nella lezione successiva alcune applicazioni importanti del prodotto scalare; per ora ricordiamo una disuguaglianza fondamentale che applichiamo subito al problema dell'integrazione del prodotto di due funzioni, raffinando la (2.9)

Proposizione 2.20 (Disuguaglianza di Schwartz) *Se (\cdot, \cdot) è un prodotto scalare definito nello spazio funzionale V , allora per ogni coppia di vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} di V si ha*

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Inoltre,

$$|\lambda| = 1, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \Leftrightarrow \quad \exists \rho \geq 0: \quad \mathbf{u} = \lambda \rho \mathbf{v}$$

Corollario 2.21 (Continuità del prodotto scalare) *Se $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ in V , allora*

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.16)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= |(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \\ &|(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)| + |(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \mathbf{v}_n)| + |(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v})| \leq \\ &\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| \|\mathbf{v}_n\| + \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \uparrow +\infty$ e osservando che la norma di \mathbf{v}_n si mantiene limitata (di fatto converge alla norma di \mathbf{v}) si conclude.

Corollario 2.22 Se $u, v \in \mathcal{L}^2(E)$ allora

$$\int_E |u(x) \cdot v(x)| dx \leq \sqrt{\int_E |u(x)|^2 dx} \sqrt{\int_E |v(x)|^2 dx} = \|u\|_{\mathcal{L}^2(E)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(E)}$$

Inoltre, se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono due successioni convergenti rispettivamente a u, v in $\mathcal{L}^2(E)$ si ha

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_E u_n(x) \cdot v_n(x) dx = \int_E u(x) \cdot v(x) dx.$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Schwartz per dimostrare che $\mathcal{L}^2(E)$ è uno spazio completo.

Teorema 2.23 (Completezza di $\mathcal{L}^2(E)$) Se una successione $u_n \in \mathcal{L}^2(E)$ soddisfa la

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\int_E |u_n(x)|^2 dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{\mathcal{L}^2(E)} < +\infty$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge puntualmente q.o. ed in $\mathcal{L}^2(E)$ ad una funzione S integrabile in E :

$$\lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n(x) = S(x) \quad \text{q.o. in } E, \quad \text{con} \quad \lim_{N \uparrow +\infty} \int_E \left| S(x) - \sum_{n=1}^N u_n(x) \right|^2 dx = 0. \quad (2.17)$$

In particolare, $\mathcal{L}^2(E)$ è completo.

Dimostrazione

Per dimostrare il primo limite di (2.17) basterà mostrare che

$$\tilde{S}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)| < +\infty \quad \text{per q.o. } x \in E;$$

quest'ultima disuguaglianza è certamente verificata se

$$\int_E |\tilde{S}(x)|^2 dx < +\infty.$$

posto

$$\tilde{S}_N(x) := \sum_{n=1}^N |u_n(x)|$$

evidentemente $\tilde{S}_N(x)$ (e quindi anche $\tilde{S}_N^2(x)$) è una successione non negativa e monotona non decrescente rispetto a N ; per il teorema di Beppo Levi

$$\int_E |\tilde{S}(x)|^2 dx = \lim_{N \uparrow +\infty} \int_E |\tilde{S}_N(x)|^2 dx.$$

Se noi mostriamo che

$$\int_E |\tilde{S}_N(x)|^2 dx \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{\mathcal{L}^2(E)} \right)^2$$

abbiamo concluso.

Ricordiamo una semplice identità: se a_1, a_2, \dots, a_N sono numeri reali

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) = \sum_{m,n=1}^N a_m a_n; \quad (2.18)$$

applicando questa identità alla somma che definisce \tilde{S}_N e applicando la disuguaglianza di Schwartz otteniamo

$$\begin{aligned} \int_E |\tilde{S}_N(x)|^2 dx &= \int_E \sum_{m,n=1}^N |u_m(x)| |u_n(x)| dx = \sum_{m,n=1}^N \int_E |u_m(x)| |u_n(x)| dx \\ &\leq \sum_{m,n=1}^N \|u_m\|_{\mathcal{L}^2(E)} \|u_n\|_{\mathcal{L}^2(E)} = \left(\sum_{n=1}^N \|u_n\|_{\mathcal{L}^2(E)} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{\mathcal{L}^2(E)} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il secondo limite in (2.17) segue dal teorema della convergenza dominata.

Approfondimento

Convergenza $\mathcal{L}^2(E)$ e convergenza q.o.. Possiamo ripetere anche nel caso di $\mathcal{L}^2(E)$ considerazioni analoghe a quelle precedentemente presentate per $\mathcal{L}^1(E)$. Supponiamo dunque di sapere che una successione di funzioni complesse u_n definite in E converga q.o. a u . Per poter concludere che vi è convergenza anche in $\mathcal{L}^2(E)$

- Occorre innanzitutto controllare che u_n, u appartengano a $\mathcal{L}^2(E)$.
- In caso affermativo, l'unico (a meno di insiemi trascurabili...) limite possibile per la successione u_n in $\mathcal{L}^1(E)$ è la funzione u
- Si hanno quindi tre possibilità:
 1. applicare direttamente la definizione e stimare in modo opportuno (per es. calcolandoli esplicitamente...) gli integrali

$$\int_E |u_n(x) - u(x)|^2 dx \quad \text{ed il relativo limite per } n \uparrow +\infty;$$

2. controllare se le ipotesi del teorema di Beppo Levi sono soddisfatte (convergenza monotona) e controllare che il limite degli integrali

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_E |u_n(x)|^2 dx = \int_E |u(x)|^2 dx$$

sia finito (che in tal caso è una condizione *necessaria e sufficiente* per la convergenza)

3. controllare se le ipotesi del teorema di Lebesgue sono verificate (convergenza dominata) per i quadrati delle funzioni u_n :

$$\exists v : |u_n(x)|^2 \leq v(x) \quad \text{per q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N}; \quad \int_E v(x) dx < +\infty.$$

Queste forniscono una condizione *sufficiente* per la convergenza in $\mathcal{L}^2(E)$.

- Nel caso di una *serie* di funzioni si applica il teorema 2.23 a meno che non si tratti di una serie di *funzioni ortogonali*, che tratteremo nella prossima lezione.

Concludiamo con un risultato che illustra la relazione tra gli spazi fin qui introdotti nel caso che la misura $|E|$ di E sia finita.

Proposizione 2.24 *Supponiamo che $|E| < +\infty$; allora*

$$\mathcal{L}^\infty(E) \subset \mathcal{L}^2(E) \subset \mathcal{L}^1(E); \quad (2.20)$$

inoltre

$$u \in \mathcal{L}^\infty(E) \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{\mathcal{L}^2(E)} \leq \sqrt{|E|} \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$$

e

$$u \in \mathcal{L}^1(E) \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{\mathcal{L}^1(E)} \leq \sqrt{|E|} \|u\|_{\mathcal{L}^2(E)}.$$

Infine, se u_n è una successione di funzioni definite in E si ha

$$u_n \rightarrow u \text{ in } \mathcal{L}^\infty(E) \quad \Rightarrow \quad u_n \rightarrow u \text{ in } \mathcal{L}^2(E) \quad \Rightarrow \quad u_n \rightarrow u \text{ in } \mathcal{L}^1(E).$$

Attenzione!

Il caso $|E| = +\infty$. Quando la misura di E non è finita (ad esempio $E := \mathbb{R}$ o $E := (0, +\infty)$) nessuna delle inclusioni (2.20) è più vera: basta considerare la famiglia di funzioni $1/(x+1)^\alpha$, $\alpha \geq 0$, per $E := (0, +\infty)$.