

## 10. Singolarità e residui



Se solo conoscessi il vero enunciato del teorema! Allora sarebbe facile per me darne la dimostrazione...

*Bernhard Riemann (1826-1866)*

Vediamo di trarre altre importanti conseguenze dai risultati circa l'analiticità delle funzioni olomorfe.

Una prima interessante conseguenza è che basta un'insieme ridotto di punti (per esempio una curva) per determinare univocamente una funzione olomorfa in un aperto *connesso*  $\Omega \subset \mathbb{C}$ : è il principio del prolungamento analitico, cui si arriva studiando gli zeri di una funzione olomorfa.

**Teorema 10.1** *Sia  $u$  una funzione olomorfa nell'aperto connesso  $\Omega \subset \mathbb{C}$  e non identicamente nulla; allora gli zeri di  $u$  sono isolati, cioè*

$$u(z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \rho > 0 : u(z) \neq 0, \quad \forall z \in B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (10.1)$$

Noi dimostriamo una proprietà un poco più debole: se  $u$  si annulla in  $z_0$ , allora  $u$  è identicamente nulla in un intorno di  $z_0$  oppure  $z_0$  è uno zero isolato. È facile convincersi “graficamente” che da quest'ultima proprietà segue poi l'enunciato del teorema: la dimostrazione rigorosa fa ricorso alla nozione topologica di connessione, che qui non approfondiamo.

Passiamo allora alla dimostrazione, che è un'immediata conseguenza dell'analiticità di  $u$ : infatti sappiamo che se  $B_R(z_0) \subset \Omega$  allora  $u$  ammette lo sviluppo in serie di potenze in  $B_R(z_0)$

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0). \quad (10.2)$$

Sono ovviamente possibili solo due eventualità:

- i coefficienti  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sono tutti nulli; in tal caso  $u$  è identicamente nulla in  $B_R(z_0)$ .
- $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  sono nulli ma  $c_k \neq 0$ ; in tal caso si ha

$$\begin{aligned} u(z) &= c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots + c_{k+n} (z - z_0)^{k+n} + \dots \\ &= (z - z_0)^k \left[ c_k + c_{k+1} (z - z_0)^1 + \dots + c_{k+n} (z - z_0)^n + \dots \right] \\ &= (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{+\infty} c_{k+n} (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (10.3)$$

Ponendo  $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_{k+n} (z - z_0)^n$ , si ottiene la rappresentazione di  $u$  come prodotto

$$u(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \quad (10.4)$$

ed essendo  $g$  continua si trova certamente un intorno  $B_\rho(z_0)$  di  $z_0$  in cui  $g$  è differente da 0. Poichè anche il fattore  $(z - z_0)^k$  si annulla solo in  $z_0$ , abbiamo dimostrato che  $z_0$  è uno zero isolato di  $u$ . ■

Nel corso della dimostrazione abbiamo anche dimostrato una decomposizione di  $u$  che è interessante di per sè, e che fissiamo nel seguente risultato.

**Corollario 10.2 (Ordine di annullamento)** *Sia  $z_0$  un zero isolato della funzione olomorfa  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora esiste un unico intero  $k \geq 1$  ed una funzione olomorfa  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $g(z_0) \neq 0$  e*

$$u(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad \forall z \in \Omega. \quad (10.5)$$

Tale intero  $k$  si chiama ordine di annullamento o di zero di  $u$

Il teorema 10.1 si può anche enunciare in questo modo: se l'insieme degli zeri di una funzione  $u$  olomorfa nell'aperto connesso  $\Omega$  ha almeno un punto di accumulazione interno a  $\Omega$ , allora  $u$  è identicamente nulla. Applicato alla differenza di due funzioni olomorfe, questo teorema ci permette di enunciare il principio del prolungamento analitico:

**Corollario 10.3 (Principio del prolungamento analitico)** *Se due funzioni olomorfe  $u, g$  olomorfe nell'aperto connesso  $\Omega$  coincidono in un insieme che ha almeno un punto di accumulazione interno a  $\Omega$ , allora coincidono in tutto  $\Omega$ .*

Abbiamo visto che la derivabilità in senso complesso nell'intorno di un punto  $z_0$  ci fornisce un'informazione assai dettagliata sulla struttura della funzione vicino a  $z_0$ : essa si può sviluppare in serie di potenze. Vogliamo cercare di ottenere informazioni altrettanto precise, quando la funzione è derivabile solo in un intorno  $B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$  ma a priori non in  $z_0$ . È il caso, cioè, di una singolarità isolata, caso che si presenta assai di frequente.

Per convincersene, consideriamo ad esempio il quoziente  $R(z) := P(z)/Q(z)$  due funzioni olomorfe, delle quali  $Q$  non sia ovviamente identicamente nulla. Grazie al teorema precedente e alla formula (9.4), sappiamo che tale quoziente definisce una funzione olomorfa eccetto che in un insieme di punti isolati, precisamente gli zeri di  $Q$ : questi saranno proprio le singolarità, isolate appunto, della funzione  $R$ .

Nel caso di un quoziente, naturalmente, è facile stabilire il comportamento nell'intorno di una singolarità, grazie al corollario precedente: infatti se  $Q(z_0) = 0$ , sappiamo che  $Q(z) = (z - z_0)^k Q_0(z)$  con  $Q_0$  olomorfa e  $Q_0(z_0) \neq 0$ . Posto  $R_0 := P/Q_0$ ,  $R_0$  risulta olomorfa almeno in un intorno di  $z_0$ . Si ottiene così

$$R(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} R_0(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (10.6)$$

dove abbiamo sviluppato in serie di Taylor la funzione  $R_0$ . Posto  $c_{n-k} := a_n$ , deduciamo che la funzione di partenza  $R$  ha uno sviluppo del tipo

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n-k} \\ &= c_{-k} (z - z_0)^{-k} + c_{-k+1} (z - z_0)^{-k+1} + \dots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} \\ &\quad + c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (10.7)$$

dove i primi  $k$  termini

$$s(z) := c_{-k} (z - z_0)^{-k} + c_{-k+1} (z - z_0)^{-k+1} + \dots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} \quad (10.8)$$

formano la cosiddetta parte *singolare*, definita in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ , e gli altri

$$r(z) := c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots \quad (10.9)$$

formano la parte *regolare*, convergente in un intorno circolare di centro  $z_0$ .

Questa situazione è di carattere generale, e non dipende dal fatto che stiamo considerando il quoziente di due funzioni: essa infatti è legata alla natura isolata della singolarità. Più in generale, è possibile ottenere uno sviluppo in serie molto utile di ogni funzione olomorfa in una corona circolare.

## Corone circolari e sviluppo in serie di Laurent

Nell'enunciato del Corollario 9.11 si suppone che la funzione  $u$  sia olomorfa in un disco  $B_\rho(z_0)$  e si deduce che essa è sviluppabile in serie di potenze nel disco stesso. Ora consideriamo il caso più generale in cui  $u$  è olomorfa in una

$$\text{corona circolare } K_{r,R}(z_0) := \left\{ z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R \right\}, \quad 0 \leq r < R \leq +\infty.$$

In tal caso vale la rappresentazione di Laurent:

**Teorema 10.4 (Sviluppo in serie di Laurent)** *Se  $u$  è olomorfa nella corona circolare  $K_{r,R}(z_0)$  allora  $u$  ammette lo sviluppo in serie*

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in K_{r,R}(z_0) \quad (10.10)$$

dove i coefficienti  $c_n$  sono dati dalla formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho(z_0)} \frac{u(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad r < \rho < R. \quad (10.11)$$

**Precisazione**

**Raggi di convergenza.** La serie (10.10) va intesa come la somma di due serie di potenze, la prima (*parte regolare*)

$$r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{ha raggio di convergenza almeno } R \quad (10.12)$$

mentre la seconda (*parte singolare*) è una serie di potenze nella variabile  $w := \frac{1}{z - z_0}$

$$s(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z - z_0)^{-m} \quad (10.13)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} w^m \quad \text{ha raggio di convergenza almeno } 1/r \quad (10.14)$$

In particolare, quando la funzione  $u$  è olomorfa in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\} = K_{0,R}(z_0)$ , la parte singolare ha raggio di convergenza  $+\infty$  ed è pertanto convergente in tutto  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .

Il caso di una corona circolare qualunque sarà particolarmente utile quando affronteremo la cosiddetta *trasformata  $\mathcal{L}$* . Ora concentriamo la nostra attenzione sul caso delle *singolarità isolate*, che corrispondono a corone circolari

## Singolarità isolate

**Teorema 10.5 (Classificazione delle singolarità)** *Supponiamo che  $u$  abbia una singolarità isolata in  $z_0$ , sia cioè olomorfa in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Allora si possono presentare solo le seguenti tre situazioni:*

- **(singolarità eliminabile)**  $|u|$  è limitato in un intorno di  $z_0$ : in questo caso esiste il limite

$$\ell := \lim_{z \rightarrow z_0} u(z)$$

e, definita  $u(z_0) := \ell$ , la funzione così estesa risulta olomorfa in tutto  $B_R(z_0)$ .

- **(polo)**  $\lim_{z \rightarrow z_0} |u(z)| = +\infty$ : in questo caso esiste un intero  $k > 0$  (detto ordine di polo di  $u$  in  $z_0$ ) ed una funzione olomorfa  $g : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$u(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \quad \forall z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (10.15)$$

Di conseguenza  $u$  ammette la (univoca) decomposizione  $u(z) = s(z) + r(z)$ , con  $s, r$  date da (10.8, 10.9) rispettivamente e  $c_{-k} \neq 0$ .

- **(singolarità essenziale)**  $u$  ha un comportamento caotico in ogni intorno di  $z_0$ : più precisamente,

$$\forall w \in \mathbb{C}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in B_R(z_0) : |u(z) - w| \leq \varepsilon. \quad (10.16)$$

Ancora una volta,  $u$  può essere decomposta in modo unico nella somma di parte regolare  $r$ , data dallo sviluppo (10.9) e olomorfa in  $B_R(z_0)$ , e di una parte singolare  $s$  olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ : quest'ultima però si può scrivere solo come serie di infiniti termini, potenze di  $(z - z_0)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} s(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \dots + c_{-n} (z - z_0)^{-n} + c_{-n+1} (z - z_0)^{-n+1} + \dots + c_{-1} (z - z_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Questa ultima serie converge per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .

Abbiamo così la possibilità di rappresentare in unico modo tutti i casi che si possono presentare quando una funzione  $u$  è olomorfa attorno ad un punto  $z_0$ : essa ammette sempre uno sviluppo della forma

$$u(z) = s(z) + r(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (10.18)$$

dove la parte singolare  $s$  è identicamente nulla se  $u$  è olomorfa anche in  $z_0$  (e i coefficienti  $c_n$  sono nulli fino all'indice  $n = k$  se  $u$  ha uno zero di ordine  $k$  in  $z_0$ ), è una somma finita di  $k$  termini se  $u$  ha un polo di ordine  $k$  (e in tal caso i coefficienti  $c_{-n}$  sono tutti nulli per  $n < k$ ), è una serie di infiniti termini se  $z_0$  è una singolarità essenziale; la rappresentazione (10.18) si chiama *sviluppo in serie di Laurent* di  $u$  in  $z_0$ .

Veniamo all'applicazione di quest'importante risultato:

**Definizione 10.6 (Residuo)** Sia  $z_0$  una singolarità isolata per la funzione olomorfa  $u$ ; si chiama residuo di  $u$  in  $z_0$  il coefficiente  $c_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent di  $u$  in  $z_0$  dato dalla (10.18). Chiameremo questo numero con il simbolo  $\text{res}(u; z_0)$ .

**Teorema 10.7 (Significato del residuo)** Se  $z_0$  è una singolarità isolata della funzione  $u$ , olomorfa in un intorno di  $z_0$ , e  $C_\rho(z_0)$  è una circonferenza sufficientemente piccola da non contenere altre singolarità di  $u$  eccetto  $z_0$

$$\text{res}(u; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho(z_0)} u(z) dz. \quad (10.19)$$

Questo non è che un caso molto particolare della seguente formula fondamentale:

**Teorema 10.8 (Formula dei residui)** Sia  $u$  olomorfa nell'aperto  $\Omega$  salvo un insieme  $\Lambda$  di punti isolati e sia  $\Gamma$  un circuito semplice, percorso in senso antiorario e non passante per alcuna delle singolarità di  $\Lambda$ , con  $B_\Gamma \subset \Omega$ . Se  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sono le singolarità di  $\Lambda$  contenute in  $B_\Gamma$ , allora

$$\oint_{\Gamma} u(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}(u; z_j). \quad (10.20)$$

*Dimostrazione*

Consideriamo prima il caso in cui vi sia un'unica singolarità  $z_1$  in  $B_\Gamma$ , e sia  $s_1$  la parte singolare dello sviluppo di Laurent di  $u$  in  $z_1$ . Se poniamo

$$\tilde{u}(z) := u(z) - s_1(z), \quad (10.21)$$

si verifica subito che  $\tilde{u}$  è olomorfa in  $B_\Gamma$  e, per il Teorema di Cauchy,

$$\oint_{\Gamma} \tilde{u}(z) dz = 0, \quad \text{da cui} \quad \oint_{\Gamma} u(z) dz = \int_{\Gamma} s_1(z) dz. \quad (10.22)$$

D'altra parte, poichè la serie di potenze che definisce  $s_1$  converge uniformemente su  $\Gamma$ , possiamo integrare per serie ed ottenere

$$\int_{\Gamma} s_1(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \int_{\Gamma} (z - z_1)^{-n} dz. \quad (10.23)$$

Ricordando gli esercizi della seconda lezione ed il teorema di Jordan, solo il primo termine di quest'ultima serie può essere diverso da 0, e vale precisamente

$$\int_{\Gamma} s_1(z) dz = c_{-1} \int_{\Gamma} (z - z_1)^{-1} dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \text{res}(u; z_1). \quad (10.24)$$

Il caso generale segue facilmente: se  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sono le parti singolari dello sviluppo di Laurent di  $u$  nelle singolarità  $z_1, z_2, \dots, z_n$  rispettivamente, ciascuna di queste è definita ed olomorfa in tutto il piano complesso salvo appunto la corrispondente singolarità. Posto

$$\tilde{u}(z) := u(z) - s_1(z) - \dots - s_n(z), \quad (10.25)$$

si verifica come prima che  $\tilde{u}$  è olomorfa in  $B_\Gamma$  e, per il Teorema di Cauchy,

$$\oint_{\Gamma} \tilde{u}(z) dz = 0, \quad \text{da cui} \quad \oint_{\Gamma} u(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} s_j(z) dz. \quad (10.26)$$

Poichè ciascun integrale da un contributo pari a  $2\pi i \text{res}(u; z_j)$ , si conclude.

*Esercizio*

Se  $u$  ha un polo semplice in  $z_0$ , dimostrare che

$$\text{res}(u; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)u(z). \quad (10.27)$$

In particolare, se  $u$  è il quoziente di due funzioni  $P, Q$  olomorfe in un intorno di  $z_0$

$$u(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0, \quad Q'(z_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{res}(u; z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (10.28)$$

Più in generale, se  $u$  ha un polo di ordine al più  $k$  in  $z_0$ , dimostrare che

$$(k-1)! \text{res}(u; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_0)^k u(z) \right) \right]. \quad (10.29)$$