Appunti delle Lezioni di Metodi Matematici per l'Ingegneria[1]

Giuseppe Savaré

Anno Accademico 2001/2002

[1] Questi brevi appunti del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria sono stati stesi essenzialmente per fissare i punti principali da affrontare durante le varie lezioni: non hanno perciò nessuna pretesa di sistematicità, di rigore e di completezza che ogni buon testo universitario dovrebbe possedere e non sostituiscono pertanto il riferimento ad un più organico trattato sugli argomenti del corso. D'altra parte la lettura di questi appunti può forse facilitare la comprensione delle lezioni svolte, ed in questo spirito le lascio volentieri a disposizione di chi ne fosse interessato. Ogni correzione, suggerimento od obiezione sono naturalmente benvenuti.

1. L'integrale di Lebesgue

Henri Lebesgue (1875-1941)

Introduzione In questa lezione cerchiamo di raccogliere (nel modo più veloce ed indolore...) alcuni dei risultati più importanti ed utili della teoria dell'integrazione di Lebesgue. Poiché non abbiamo né il tempo, né la pazienza per sviluppare e giustificare tutti i punti della teoria, seguiremo una via, diciamo così, descrittivo/assiomatica, accontentandoci di precisare con cura solo alcune definizioni e i corrispondenti enunciati.

A prima vista, la nozione di integrale $\int u(x)\,dx$ secondo Cauchy-Riemann sviluppata nei precedenti corsi di Analisi Matematica sembra essere già sufficiente, poiché si applica ad una classe abbastanza ampia di funzioni e riesce a trattare quasi tuttgli esempi che solitamente si incontrano nei primi anni di studio. D'altra parte, questa nozione di integrabilità presenta almeno tre inconvenienti:

- L'insieme di definizione di u deve essere *limitato*.
- u deve essere anch'essa *limitata*.
- La proprietà di essere misurabile non è *stabile* per la convergenza puntuale: in altre parole, può accadere che una successione di funzioni uniformemente limitate converga puntualmente ad una funzione limitata ma *non* misurabile, i cui punti di discontinuità, cioè, siano "troppo numerosi" per poter parlare di integrale.

Queste difficoltà sono aggirate dalla nuova nozione di integrabilità che andiamo ad esporre.

I punti cardine della nuova teoria saranno

1. ***una definizione più generale di insieme di misura nulla***;
2. la possibilità di integrare ***"praticamente" ogni funzione positiva*** su ogni insieme, limitato o no: per questo si ammette anche $+\infty$ tra i possibili valori che può assumere l'integrale;
3. la possibilità ***di scambiare l'ordine di serie e integrali*** per le funzioni positive;
4. l'integrabilità delle funzioni di segno qualunque si riconduce all'integrabilità del modulo della funzione;
5. nuovi teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

L'integrale delle funzioni positive

Definizione 1.1 (Funzioni positive, reali e complesse) *Diremo che una funzione u definita in un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ è* positiva *se il suo codominio è l'intervallo* esteso $[0, +\infty]$*: ammettiamo pertanto che vi siano punti (anche tutti!) di E in cui la funzione vale $+\infty$. u sarà invece* reale *(risp.* complessa*) se il suo codominio è $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$): in tal caso* non *ammettiamo valori infiniti. Osserviamo che le funzioni reali sono un caso particolare di funzioni complesse.*

Convenzione. ***L'algebra in** $[0, +\infty]$**.*** In $[0, +\infty]$ non vi sono difficoltà a definire la somma e la relazione d'ordine, come ciascuno può facilmente immaginare. Più arbitrario il prodotto $0 \cdot (+\infty)$: quando tratteremo di integrali e di funzioni positive, converremo che

$$0 \cdot (+\infty) := 0. \tag{1.1}$$

Questa definizione, che può sembrare arbitraria ed in contrasto con tutte le cautele imparate negli anni precedenti, non è invece così bizzarra, e nasce dall'esigenza di integrare funzioni che valgono $+\infty$ su un insieme di misura nulla, o funzioni che valgono 0 su un insieme di misura $+\infty$ (come tutto $\mathbb{R}$, per esempio). I entrambi i casi, se si vuole preservare la proprietà di monotonia che introdurremo tra un momento, si è costretti alla definizione (1.1).

Teorema 1.2 (Integrale di Lebesgue per le funzioni positive) *Ad ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ e ad ogni funzione positiva $u : E \to [0, +\infty]$ è possibile associare univocamente un numero*

$$\int_E u(x)\, dx \ \in [0, +\infty] \tag{1.2}$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà fondamentali:

- ***(Estensione)*** *Se E è misurabile e u è integrabile secondo Cauchy-Riemann (anche in senso generalizzato) allora l'integrale di Lebesgue*

$$\int_E u(x)\, dx \quad \text{coincide con l'integrale di Cauchy-Riemann.} \tag{1.3}$$

- ***(Monotonia)*** *Per ogni $u, v : E \to [0, +\infty]$*

$$u \le v \quad \Rightarrow \quad \int_E u(x)\, dx \le \int_E v(x)\, dx \tag{1.4}$$

- ***(Continuità: lemma di Fatou)*** *Se $u_n : E \to [0, +\infty]$ è una successione di funzioni convergente puntualmente a u, cioè*

$$\exists \lim_{n\uparrow+\infty} u_n(x) =: u(x) \quad \forall\, x \in E, \tag{1.5a}$$

tali che per un opportuna costante M

$$\int_E u_n(x)\, dx \le M < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.5b}$$

allora anche

$$\int_E u(x)\, dx \le M. \tag{1.5c}$$

Commento. Il senso del primo punto (Estensione) del precedente teorema è quello di garantire che passando dall'integrale di Riemann a quello di Lebesgue *operativamente* non si è costretti a cambiare alcunchè di ciò che si è appreso. Gli altri due, invece, servono per *identificare univocamente* la nuova nozione introdotta e "tranquillizzare" il lettore più esigente: in altri termini, tra tutte le possibili estensioni del concetto di integrale ne esiste solo una, quella proposta appunto da Lebesgue, che soddisfa i due ulteriori requisiti di monotonia e di continuità. Può sembrare strano come è stata formulata quest'ultima nozione (Lemma di Fatou); riprenderemo meglio questo discorso dopo aver brevemente ricordato alcune proprietà più familiari.

Convenzione. ***Misurabilità addio.*** La teoria dell'integrazione di Lebesgue è strettamente legata ad un nuovo concetto di misurabilità di insiemi e funzioni, cui accenneremo più avanti. Poichè l'esistenza di funzioni *non* misurabili è strettamente legata a sottili questioni di logica e teoria degli insiemi, e tutte le funzioni che ammettono una definizione costruttiva risultano, di fatto, misurabili, per semplificare la trattazione noi assumeremo *sempre* che le funzioni di cui stiamo parlando siano misurabili: d'ora in avanti, quindi, non ci preoccuperemo più di ricordarlo esplicitamente. Spero che Lebegue possa perdonarmi...

Proprietà elementari

Proposizione 1.3 *Se $E \subset \mathbb{R}^N$, u, v sono funzioni positive definite in E e $\lambda \geq 0$ è uno scalare positivo si ha*

- ***(Additività rispetto a** u**)***

$$\int_E (u(x) + v(x))\, dx = \int_E u(x)\, dx + \int_E v(x)\, dx, \tag{1.6}$$

$$\int_E \lambda u(x)\, dx = \lambda \int_E u(x)\, dx. \tag{1.7}$$

- ***(Funzioni caratteristiche)*** *Per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$ la* funzione caratteristica *di A è definita da*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Per ogni $A \subset E$ si ha

$$\int_A u(x)\, dx = \int_E u(x) \mathbb{1}_A(x)\, dx. \tag{1.8}$$

- ***(Additività rispetto a** E**)*** *Se E è l'unione* disgiunta *di due insiemi A, B (cioè $E = A \cup B,\ A \cap B = \varnothing$) allora*

$$\int_E u(x)\, dx = \int_A u(x)\, dx + \int_B u(x)\, dx. \tag{1.9}$$

Osservazione Se $A \subset E$ e u è *positiva*, allora

$$\int_A u(x)\, dx \leq \int_E u(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Definizione 1.4 (Misura di Lebesgue di un insieme) *Se $E \subset \mathbb{R}^N$, indichiamo con $|E|$ la sua misura di Lebesgue N-dimensionale (lunghezza sulla retta, area nel piano, volume nello spazio!), definita da*

$$|E| := \int_E 1\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_E(x)\, dx. \tag{1.11}$$

Nota Per la proprietà di estensione dell'integrale di Lebesgue, questa definizione coincide con quella di Peano-Jordan, quando l'insieme E è misurabile in questo senso più restrittivo.

Scambio di operatori-I

Teorema 1.5 (Beppo Levi, convergenza monotona)

- *Se u_n è una successione* crescente *di funzioni positive definite in $E \subset \mathbb{R}^N$, tali cioè che*
$$n \le m \quad \Rightarrow \quad u_n(x) \le u_m(x) \quad \forall\, x \in E,$$
allora
$$\int_E \lim_{n\uparrow+\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\uparrow+\infty} \int_E u_n(x)\,dx. \tag{1.12}$$

- *Se u_n è una successione* decrescente *di funzioni positive definite in $E \subset \mathbb{R}^N$, tali cioè che*
$$n \le m \quad \Rightarrow \quad u_n(x) \ge u_m(x) \quad \forall\, x \in E, \tag{1.13}$$
se almeno una di esse ha integrale finito allora
$$\int_E \lim_{n\uparrow+\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\uparrow+\infty} \int_E u_n(x)\,dx. \tag{1.14}$$

Corollario 1.6 (Integrazione per serie) *Se u_n è una successione di funzioni positive definite in $E \subset \mathbb{R}^N$, allora*
$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E u_n(x)\,dx. \tag{1.15}$$

Nota

L'ipotesi *essenziale* del Teorema di Beppo Levi è la monotonia della successione $u_n(x)$ rispetto a n (1.5): questa assicura *sempre* l'esistenza del limite puntuale
$$u_\infty(x) := \lim_{n\uparrow+\infty} u_n(x) \quad \forall\, x \in E,$$
e l'esistenza del limite degli integrali
$$i_\infty := \lim_{n\uparrow+\infty} \int_E u_n(x)\,dx.$$
Dunque, il contenuto veramente significativo del teorema sta nell'affermare che i_∞ è l'integrale di u_∞ su E.

Dimostrazione

Il teorema di Beppo Levi è una conseguenza immediata del lemma di Fatou (1.5a,b,c): basta osservare che per monotonia
$$u_n(x) \le u_\infty(x) \quad \text{e quindi} \quad \int_E u_n(x)\,dx \le \int_E u_\infty(x)\,dx,$$
da cui
$$i_\infty := \lim_{n\uparrow+\infty} \int_E u_n(x)\,dx \le \int_E u_\infty(x)\,dx;$$
d'altra parte, sempre per la monotonia della successione degli integrali,
$$\int_E u_n(x)\,dx \le i_\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
e il Lemma di Fatou stabilisce che
$$\int_E u_\infty(x)\,dx \le i_\infty.$$

Il teorema di integrazione per serie è una conseguenza diretta del precedente, applicato alla successione delle somme parziali.

Richiami

Famiglie numerabili. Una collezione (o famiglia) di oggetti $\mathscr{A}$ si dice *numerabile* se può essere messa in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali; in altre parole, tutti gli elementi di $\mathscr{A}$ si possono "etichettare" con un numero intero che li individua univocamente e si possono conseguentemente "elencare" in una successione
$$\mathscr{A} := \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}.$$

Quando gli elementi A_n sono a loro volta insiemi, si parla di collezione o famiglia *numerabile* di insiemi. Capiterà sovente di considerarne *l'unione*, cioè un nuovo insieme

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

i cui elementi sono *tutti e soli* quelli che apparengono a qualcuno delgli insiemi A_n. Chiaramente

$$B \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, b \in B\ \exists\, n \in \mathbb{N} : b \in A_n.$$

Diremo che $\mathscr{A}$ è *al più numerabile*, quando è numerabile oppure $\mathscr{A}$ è costituita da un numero *finito* di elementi.

Richiami

Famiglie monotone di insiemi, unioni disgiunte. Una famiglia $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ di sottoinsiemi di qualche insieme E si dice *crescente* se

$$n \leq m \quad \Rightarrow \quad A_n \subset A_m.$$

Se $A := \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ in questo caso scriviamo più espressivamente che $A_n \uparrow A$.

Una famiglia $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ di insiemi si dice *decrescente* se

$$n \leq m \quad \Rightarrow \quad A_n \supset A_m.$$

Se $A := \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ in questo caso scriviamo più espressivamente che $A_n \downarrow A$. In entrambi i casi diciamo che A_n tende ad A quando $n \uparrow +\infty$.

Una famiglia $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ di sottoinsiemi di qualche insieme E si dice *disgiunta* se

$$n \neq m \quad \Rightarrow \quad A_n \cap A_m = \varnothing.$$

In questo caso diciamo che $A := \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ è *l'unione disgiunta* della famiglia o che la famiglia forma una *partizione* di A.

Corollario 1.7 (Approssimazione e decomposizione degli integrali)

- *Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ è una famiglia* crescente *convergente a E, cioè $E_n \uparrow E$ quando $n \uparrow +\infty$, allora*

$$\int_E u(x)\, dx = \lim_{n \uparrow +\infty} \int_{E_n} u(x)\, dx. \tag{1.16}$$

- *Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ è una famiglia* decrescente *convergente a E, cioè $E_n \downarrow E$ quando $n \uparrow +\infty$, e*

$$\exists\, m \in \mathbb{N} : \quad \int_{E_m} u(x)\, dx < +\infty,$$

allora

$$\int_E u(x)\, dx = \lim_{n \uparrow +\infty} \int_{E_n} u(x)\, dx. \tag{1.17}$$

- *Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ è una partizione di E, cioè E è l'unione* disgiunta *della famiglia, allora*

$$\int_E u(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{E_n} u(x)\, dx. \tag{1.18}$$

Nota

Questo risultato è estremamente utile quando si deve calcolare esplicitamente un integrale: si cerca di approssimare o di decomporre l'insieme E in insiemi più piccoli E_n in modo che u sia integrabile secondo Cauchy-Riemann su E_n (in particolare, gli E_n dovranno essere limitati e anche u dovrà essere limitata su questi). Dopo di che si ottiene l'integrale di u

su tutto E come limite o come serie, a seconda che si sia scelto una famiglia crescente e approssimante E o una partizione di E.

La potenza del teorema sta nel fatto che siamo completamente *liberi* nella scelta della decomposizione: in altre parole, l'integrale non dipende da come si approssima o si decompone l'insieme E.

Corollario 1.8

- *Se* $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ *è una famiglia* crescente *convergente a* E*, cioè* $E_n \uparrow E$ *quando* $n \uparrow +\infty$*, allora*
$$|E| = \lim_{n \uparrow +\infty} |E_n|. \tag{1.19}$$
- *Se* $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ *è una famiglia* decrescente *convergente a* E*, cioè* $E_n \downarrow E$ *quando* $n \uparrow +\infty$*, e almeno uno di essi ha misura* finita *allora*
$$|E| = \lim_{n \uparrow +\infty} |E_n|. \tag{1.20}$$
- *Se* $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ *è una partizione di* E*, cioè* E *è l'unione* disgiunta *della famiglia, allora*
$$|E| = \sum_{n=0}^{+\infty} |E_n|. \tag{1.21}$$
Più in generale, se E *è l'unione non necessariamente disgiunta della famiglia* E_n *si ha*
$$|E| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |E_n|. \tag{1.22}$$

Teorema 1.9 (Fubini) *Se* $E = (a,b) \times (c,d)$ *è un insieme rettangolare (anche illimitato) di* $\mathbb{R}^2$ *e* u *è una funzione positiva definita in* E*, allora*
$$\iint_E u(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d u(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b u(x,y)\,dx \right) dy. \tag{1.23}$$

Integrale delle funzioni reali o complesse

Definizione 1.10 (Integrale di Lebesgue) *Se u è una funzione reale o complessa definita in $E \subset \mathbb{R}^N$, diciamo che u è* integrabile secondo Lebesgue *se*

$$\int_E |u(x)|\, dx < +\infty. \tag{1.24}$$

Se u è reale poniamo quindi per definizione

$$\int_E u(x)\, dx := \int_E u^+(x)\, dx - \int_E u^-(x)\, dx. \tag{1.25}$$

Analogamente, se u è complessa*, definiamo*

$$\int_E u(x)\, dx := \int_E \operatorname{Re} u(x)\, dx + i \int_E \operatorname{Im} u(x)\, dx. \tag{1.26}$$

Proposizione 1.11 (Validità delle proprietà elementari)

- *La proprietà di monotonia* (1.4) *vale anche se le funzioni son* reali e integrabili su E.
- *La proprietà di* estensione*, la proposizione 1.3 e il corollario 1.7 valgono anche in ambito complesso (con scalari complessi) purchè le funzioni f, g siano* integrabili *su E.*

Proposizione 1.12 (Disuguaglianza del modulo) *Se u è una funzione complessa* integrabile *in $E \subset \mathbb{R}^N$, allora*

$$\left| \int_E u(x)\, dx \right| \leq \int_E \big|u(x)\big|\, dx. \tag{1.27}$$

Scambio di operatori-II

Teorema 1.13 (Convergenza dominata, Lebesgue) *Supponiamo che una successione di funzioni complesse u_n, definite nell'insieme $E \subset \mathbb{R}^N$, converga puntualmente ad una funzione u. Se è possibile trovare una funzione positiva e integrabile g che* domina *tutte le u_n, cioè*

$$|u_n(x)| \leq v(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in E, \qquad \int_E v(x)\, dx < +\infty, \tag{1.28}$$

allora

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_E |u_n(x) - u(x)|\, dx = 0. \tag{1.29}$$

In particolare

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_E u_n(x)\, dx = \int_E u(x)\, dx. \tag{1.30}$$

Corollario 1.14 (Continuità degli integrali dipendenti da un parametro) *Sia u una funzione complessa definita nel rettangolo $E := (a,b) \times (c,d)$ e supponiamo che la funzione integrale rispetto alla variabile y*

$$U(x) := \int_c^d u(x,y)\, dy$$

sia ben definita in (a,b), cioè che la funzione $y \mapsto u(x,y)$ sia integrabile rispetto a y in (c,d). Supponiamo che per quasi ogni $y \in (c,d)$ la funzione

$$x \mapsto u(x,y) \quad \textit{sia continua in } (a,b)$$

ed esista una funzione v dipendente solo da y tale che

$$|u(x,y)| \leq v(y), \qquad \int_c^d v(y)\, dy < +\infty.$$

Allora la funzione U è continua in (a,b).

Insiemi trascurabili e funzioni definite q.o.

Definizione 1.15 (Insiemi trascurabili) *Diciamo che $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ è* trascurabile *quando la sua misura di Lebesgue $|\mathcal{N}|$ è nulla.*

Nota

Per la proprietà di estensione, se un insieme è misurabile secondo Peano-Jordan e ha misura nulla, esso è trascurabile: in particolare ***un numero finito di punti sulla retta, una famiglia di curve nel piano o un numero finito di superfici nello spazio sono insiemi trascurabili***. La proposizione che segue mostra però che la classe degli insiemi trascurabili è notevolmente più ampia.

Proposizione 1.16 *Se $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_n, \ldots$ sono insiemi di misura nulla secondo la definizione 1.15, anche la loro unione*

$$\mathcal{N} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \quad \textit{ha misura nulla.}$$

Approfondimento

Caratterizzazione degli insiemi trascurabili. È posibile fornire una caratterizzazione più intrinseca degli insiemi trascurabili, che non fa uso della teoria dell'integrazione: infatti, si può dimostrare che un insieme $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ è trascurabile se e solo se, comunque sia fissato $\varepsilon > 0$, è possibile ricoprire $\mathcal{N}$ con una famiglia *al più numerabile* di rettangoli (cf. la nota seguente) $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ tali che

$$\mathcal{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \leq \varepsilon \quad \square \tag{1.31}$$

Richiami

Rettangoli N-dimensionali. Un *rettangolo* N-dimensionale R (cioè un intervallo in $\mathbb{R}^1$, un "vero" rettangolo in $\mathbb{R}^2$, un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$...) è il prodotto di N intervalli $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ che supporremo indifferentemente aperti, chiusi o semiaperti, limitati o no, eventualmente degeneri (se capita che $a_j = b_j$ per qualche indice; in particolare un punto è sempre un N-rettangolo degenere, così come un segmento è un 2-rettangolo ed un rettangolo è un 3-rettangolo: ai matematici piacciono tanto queste situazioni un po' maniacali...che poi però si rivelano comode per non trascinarsi la necessità di esaminare tanti casi particolari!) La ***misura di** R* (cioè la lunghezza per un intervallo, l'area per un rettangolo, il volume per un parallelepipedo) sarà ovviamente

$$|R| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_N - a_N). \tag{1.32}$$

Nota

La novità, rispetto all'usuale definizione della misura di Peano-Jordan, è la possibilità di usare *infiniti* rettangoli, anziché solo un numero finito. Naturalmente, gli insiemi di misura nulla della precedente definizione continuano ad essere tali: in particolare le curve nel piano o le superfici nello spazio.

Un insieme numerabile (***per esempio l'insieme dei numeri razionali sulla retta reale***) è *sempre* di misura nulla: è infatti l'unione numerabile di punti, che sono particolari N-rettangoli, ciascuno di misura nulla, sicché la (1.31) è banalmente verificata.

Un teorema molto bello, dovuto a Lebesgue, dice che una funzione reale e limitata u definita ad esempio in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è integrabile secondo Cauchy-Riemann (e dunque possiamo parlare dell'integrale di u ad esempio secondo la definizione vista nel corso di Analisi 1) se e solo se essa è continua salvo al più un insieme trascurabile $\mathcal{N} \subset [a, b]$, se cioè l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo la definizione appena introdotta.

Curiosità

Misurabilità secondo Lebesgue. Avendo come riferimento il concetto di insieme trascurabile (che, come abbiamo visto, può essere introdotto indipendentemente dalla resto della teoria dell'integrazione) è possibile comprendere e definire in modo preciso il concetto di misurabilità secondo Lebesgue: una funzione u definita in $\mathbb{R}^N$ e a valori reali (o complessi) si dice *misurabile* secondo Lebesgue se, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo "buttare via" un insieme $\mathcal{R} := R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n \cup \ldots$ di rettangoli in modo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \leq \varepsilon \quad \text{e } u \text{ sia continua in } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{R}; \tag{1.33}$$

Non sembrerebbe, questa, una condizione molto più generale della misurabilità secondo Peano-Jordan (si veda la nota precedente), eppure si verifica che *praticamente* tutte le funzioni sono misurabili secondo questa nuova condizione, tanto che i controesempi che si conoscono richiedono tutti l'uso di delicati argomenti di teoria degli insiemi e dell'assioma della scelta; in particolare la classe delle funzioni misurabili secondo Lebesgue è chiusa rispetto alle varie operazioni di somma, prodotto, composizione, passaggio al limite, etc...

Si osservi che la differenza fondamentale con la definizione di misurabilità secondo Peano-Jordan è che in quest'ultima *prima* si vanno a cercare i punti di discontinuità di una funzione e *poi* si richiede che questi siano trascurabili; nella misurabilità secondo Lebesgue, invece, *prima* ci è concesso di buttare via molti punti e *poi* di controllare che la funzione che "rimane" è continua. Ad esempio, la famigerata funzione di Dirichlet, che vale 1 se il punto è razionale e 0 se è irrazionale, è discontinua in tutti i punti, e quindi *non* è misurabile secondo Peano-Jordan. D'altra parte, se noi possiamo *prima di controllarne la discontinuità*, tracurare un insieme di misura nulla, si vede subito che eliminando l'insieme dei razionali la funzione è continua sull'insieme rimanente, assumendo identicamente il valore 0: ecco giustificata la misurabilità di Lebesgue per questa funzione.

Definizione 1.17 (Proprietà valide quasi ovunque) *Diremo che una certa proprietà $\mathscr{P}$ vale per* quasi ogni *elemento di un certo insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ o, più semplicemente, che $\mathscr{P}$ vale* quasi ovunque in *E (abbreviato in* q.o. in *E) se se $\mathscr{P}$ è verificata da tutti gli elementi di E* salvo al più un sottoinsieme trascurabile.

Motivazioni.

Alla base delle precedenti definizioni sta l'idea che il termine "trascurabile" significhi effettivamente che un tale insieme non conti "nulla" agli effetti della teoria dell'integrazione; questo fatto è messo in luce dai due risultati che seguono.

Esempi

La proprietà u è continua *q.o. in* $\mathbb{R}$ significa che l'insieme delle discontinuità di u ha misura nulla.

La proprietà $\sin x \neq 0$ è vera *q.o.* in $\mathbb{R}$, perchè l'insieme dei punti $\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$ è numerabile e quindi trascurabile in $\mathbb{R}$.

La proprietà $x^2 - x \geq 0$ q.o. è falsa, perchè non è verificata nell'intervallo aperto $]0, 1[$, che ha misura $1 > 0$.

Teorema 1.18 (Insiemi trascurabili e integrali)

- *Se u* è positiva in *E, allora*

$$\boxed{\int_E u(x)\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = 0 \quad \textit{per quasi ogni } x \in E;} \tag{1.34}$$

  in altri termini, l'integrale di una funzione positiva è nullo se e solo se u è nulla salvo al più in un sottoinsieme trascurabile. In particolare, l'integrale su un'insieme trascurabile è sempre nullo.

- *Se u è positiva*

$$\boxed{\int_E u(x)\,dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad u(x) < +\infty \quad \textit{per quasi ogni } x \in E;} \tag{1.35}$$

  in altri termini, se l'integrale di una funzione positiva u è finito, allora u può assumere il valore $+\infty$ solo in un insieme trascurabile.

Corollario 1.19 *Se u, g sono due funzioni complesse definite in $E \subset \mathbb{R}^N$ allora*

$$\int_E |u(x) - v(x)|\,dx = 0 \Rightarrow \ u(x) = v(x) \ \textit{q.o. in } E \ \Rightarrow \ \int_E u(x)\,dx = \int_E v(x)\,dx. \tag{1.36}$$

Dimostrazione Supponiamo di sapere che una funzione u definita su un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ sia nulla ecccetto che in un sottoinsieme $A \subset E$ di misura $|A| = 0$. Con la convenzione algebrica che abbiamo adottato la scorsa lezione, si vede formalmente che deve essere

$$\int_E |u(x)|\, dx = \int_A |u(x)|\, dx \le +\infty \cdot |A| = +\infty \cdot 0 = 0.$$

Motivazione Il fatto che l'integrale di una funzione u che vale identicamente $+\infty$ su un insieme di misura nulla e 0 altrove debba essere 0 si giustifica con il teorema della convergenza monotona: basta infatti scegliere la successione

$$u_n(x) := n\mathbf{1}_A(x)$$

che ha per limite proprio $u(x)$; per il teorema di Beppo Levi e la linearità dell'integrale si ha

$$\int_A u(x)\, dx = \lim_{n\uparrow+\infty} \int_A n\, dx = \lim_{n\uparrow+\infty} n|A| = 0.$$

Per dimostrare l'implicazione opposta della (9.35) basta considerare la famiglia *crescente*

$$A_n := \{x \in E : u(x) \ge 1/n\}$$

Chiaramente $|A_n| = 0$, altrimenti per la proprietà di monotonia u avrebbe integrale strettamente positivo. D'altra parte si verifica subito che

$$A_n \uparrow A := \{x \in E : u(x) > 0\} \quad \text{e quindi } |A| = 0$$

per il corollario 1.8.

Con un ragionamento analogo si vede che se una funzione positiva u ha integrale finito, allora l'insieme dove u vale $+\infty$ deve essere di misura nulla. Detto I tale insieme, per la proprietà di monotonia si ha

$$\int_E u(x)\, dx \ge \int_I u(x)\, dx = +\infty \cdot |I|;$$

se il primo membro è finito, questa disuguaglianza implica banalmente $|I| = 0$.

Definizione 1.20 (Funzioni definite q.o., dominio) *Diremo che una funzione u è* definita q.o. *in un certo insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ se per quasi ogni $x \in E$ ha senso parlare del valore $u(x)$ (cioè $u(x)$ è appunto definito); in altri termini, l'insieme dove u* non *è definita è trascurabile, nel senso della definizione 1.15. Chiameremo* dominio *di u il sottinsieme $D(u)$ di E dove u è effettivamente definita. Per ipotesi, il complementare die $D(u)$ in E è trascurabile, cioè*

$$|E \setminus D(u)| = 0.$$

Il corollario 1.19 permette di definire l'integrale di una funzione u su un insieme E anche se questa non è definita su tutto E: basta che l'insieme dove u non è definita sia trascurabile.

Precisazione Se si vuole essere un po' pedanti, la definizione potrebbe essere questa:
se u è una funzione positiva o complessa q.o. *definita su $E \subset \mathbb{R}^N$, chiamiamo integrale di u su E il numero*

$$\int_E u(x)\, dx := \int_E \tilde{u}(x)\, dx$$

dove $\tilde{u}$ è un'arbitraria estensione di u a tutto E, cioè una funzione definita su E che coicnide con u su $D(u)$.
Per esempio, un estensione standard è

$$u^*(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in D(u); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Approfondimento ***Insiemi definiti q.o..*** Si potrebbe ripetete un discorso analogo anche per gli insiemi di integrazione. Diciamo che due insiemi E_1, E_2 sono q.o. uguali, o differiscono per un insieme trascurabile, quando la loro *differenza* ha misura nulla, cioè

$$E_1 \triangle E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cap (E_2 \setminus E_1) \quad \text{è trascurabile.}$$

Si vede facilmente che in tal caso le rispettive funzioni caratteristiche $\mathbf{1}_{E_1}$ e $\mathbf{1}_{E_2}$ sono q.o. uguali. Allora, per ogni funzione f positiva, o complessa e integrabile su uno dei due,

$$\int_{E_1} u(x)\,dx = \int_{E_2} u(x)\,dx.$$

Definizione 1.21 (Convergenza quasi ovunque) *Diremo che la successione di funzioni reali (o complesse) u_n definite (anche solo quasi ovunque!) in un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$* converge quasi ovunque *alla funzione u (anch'essa definita q.o.) se*

$$\lim_{n\uparrow+\infty} u_n(x) = u(x) \quad \textit{per quasi ogni } x \in E;$$

in altri termini, l'insieme dei punti $x \in E$ dove il limite non esiste o è differente da $u(x)$ è trascurabile.

Poichè l'integrale è invariante rispetto a modifiche delle funzioni in insiemi trascurabili, non sarebbe difficile (ma un po' noioso...) verificare che

la teoria precedentemente sviluppata vale anche se tutte le funzioni in gioco sono definite solo quasi ovunque.

Osservazione 1.22 (Dalla convergenza degli integrali alla convergenza q.o.) La proprietà (1.35), benchè banale, ha importanti applicazioni, come vedremo anche in seguito. Consideriamo, ad esempio, il teorema di integrazione per serie (1.15): noi sappiamo che l'uguaglianza vale sempre, ma in generale potrebbe capitare che la serie delle funzioni valga $+\infty$ in un insieme molto grande, addirittura tutto l'insieme E; in tal caso l'uguaglianza si ridurrebbe a $+\infty = +\infty$ e perderebbe parte del suo interesse. Se però noi sappiamo che *la serie degli integrali è convergente*, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{avendo integrale finito, converge q.o.}$$

Quindi dalla conoscenza del comprtamento di una serie numerica (la serie degli integrali, appunto) è possibile dedurre un'informazione sul comportamento globale di una serie di funzioni, che in generale è un oggetto molto più complesso da studiare.

Scambio di operatori - III

Teorema 1.23 (Integrazione per serie) *Se u_n è una successione di funzioni complesse definite in $E \subset \mathbb{R}^N$ tale che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E \big|u(x)\big|\, dx < +\infty,$$

allora la serie di $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge assolutamente per quasi ogni $x \in E$ e definisce q.o. una funzione che è integrabile in E. Si ha

$$\boxed{\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E u_n(x)\, dx.} \tag{1.37}$$

Inoltre la successione degli integrali dei resti $R_n(x) := \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ è infinitesima, cioè

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \int_E \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| dx \le \lim_{n\uparrow+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \int_E |u_k(x)|\, dx = 0. \tag{1.38}$$

Dimostrazione Ci limitiamo a controllare che la serie delle funzioni convege quasi ovunque: si tratta di un semplice esercizio di applicazione del corollario 1.6. Consideriamo infatti la serie dei moduli

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|. \tag{1.39}$$

Essendo una serie a termini positivi, possiamo applicare il citato corollario e ottenere che

$$\int_E S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |u_n(x)|\, dx < +\infty \quad \text{per ipotesi del teorema.}$$

Ma allora, applicando (1.35) (cf. anche la nota 1.22) si deduce che

$S(x) < +\infty$ q.o. in E, cioè la serie (1.39) converge al di fuori di un insieme trascurabile $\mathcal{N}$.

Se per $x \in E \setminus \mathcal{N}$ converge la serie dei moduli, possiamo concludere che anche la serie delle funzioni converge (convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza semplice). ■

Formule di calcolo degli integrali multipli

Teorema 1.24 (Fubini) *Se $E = (a,b) \times (c,d)$ è un insieme rettangolare (anche illimitato) di $\mathbb{R}^2$ e u è una funzione complessa* integrabile *su E, cioè se*

$$\iint_E \big|u(x,y)\big|\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \big|u(x,y)\big|\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \big|u(x,y)\big|\, dx\right) dy < +\infty,$$

allora

$$\boxed{\iint_E u(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d u(x,y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b u(x,y)\, dx\right) dy.} \tag{1.40}$$

Nella formula precedente si intende che per q.o. *$x \in (a,b)$ la funzione $y \mapsto u(x,y)$ è integrabile in (c,d) e che il suo integrale è a sua volta integrabile in (a,b) rispetto a x. Analogo discorso vale scambiando il ruolo delle due variabili.*

Esercizio Seguendo la traccia della precedente dimostrazione e applicando il Teorema di Tonelli (1.23), dimostrare l'ultima parte del Teorema di Fubini (le ultime tre righe!).

Richiami

Trasformazioni e matrice derivata. Se $T : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è una trasformazione *differenziabile*, denotiamo con $DT(x)$ la sua matrice derivata nel punto $x \in E$ e con $JT(x)$ il suo Jacobiano, cioè

$$JT(x) := \det\big[DT(x)\big] \quad \forall\, x \in E.$$

$T(E)$ è l'immagine di E, cioè l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^N$ che sono effettivamente assunti dalla trasformazione T in qualche punto di E. Se $y \in T(E)$ definiamo la *molteplicità* di y come il numero delle sue controimmagini tramite T, cioè il numero di volte in cui y viene assunto in E dalla trasformazione T, e la indichiamo con il simbolo

$$\#\{x : T(x) = y\}.$$

Tale numero può anche essere $+\infty$; osserviamo che se T è iniettiva allora $\#\{x : T(x) = y\}$ vale identicamente 1 su $T(E)$.

Teorema 1.25 (Formula di cambiamento di variabili) *Sia $T : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una trasformazione differenziabile e u una funzione* positiva *q.o. definita su $T(E)$. Allora*

$$\int_{T(E)} u(y)\, \#\{x : T(x) = y\}\, dy = \int_E u(T(x))\big|JT(x)\big|\, dx. \tag{1.41}$$

La formula precedente vale anche se u è reale o complessa, purchè

$$\int_{T(E)} |u(y)|\, \#\{x : T(x) = y\}\, dy = \int_E |u(T(x))|\, \big|JT(x)\big|\, dx < +\infty.$$

In particolare, se T è iniettiva al di fuori di un insieme trascurabile *vale la formula*

$$\boxed{\int_{T(E)} u(y)\, dy = \int_E u(T(x))\big|JT(x)\big|\, dx, \quad \big|T(E)\big| = \int_E \big|JT(x)\big|\, dx.}$$

Derivate e integrali

Teorema 1.26 (Fondamentale del calcolo, Lebesgue) *Sia u una funzione complessa integrabile sull'intervallo limitato (a,b). Allora la funzione integrale*

$$U(x) := \int_a^x u(t)\,dt$$

è uniformemente continua *in $[a,b]$ ed è derivabile in quasi tutti i punti dell'intervallo, con*

$$U'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x u(t)\,dt = u(x) \quad \text{per q.o. } x \in (a,b). \tag{1.42}$$

Nota

Il problema di trovare condizioni sufficienti per cui una data funzione U definita su un intervallo (a,b) si può ricostruire per integrazione dalla sua derivata è molto più delicato. Dal Teorema precedente si deducono facilmente tre condizioni necessarie: U dev'essere continua, derivabile in quasi tutti i punti dell'intervallo (a,b) e la sua derivata deve eseere integrabile. Purtroppo vi sono esempi (particolarmente complicati) che mostrano come queste tre condizioni *non* sono sufficienti. Noi ci limitiamo a definire con precisione questa proprietà (*assoluta continuità*) che risulta assai importante in molte situazioni e a presentare una classe sufficientemente ampia di funzioni che la verificano.

Definizione 1.27 (Funzioni assolutamente continue) *Una funzione complessa U definita su un intervallo $[a,b]$ di $\mathbb{R}$ si dice* assolutamente continua *quando è continua, è derivabile in quasi tutti i punti dell'intervallo, la sua derivata U' è integrabile in $[a,b]$ e vale la formula*

$$U(y) - U(x) = \int_a^x U'(t)\,dt \quad \text{per ogni scelta di } a \le x \le y \le b. \tag{1.43}$$

Esercizio

Dimostrare che se una funzione U verifica la (1.43) per la particolare scelta $x = a$ (e y arbitrario nell'intervallo) allora la verifica per tutti gli x.

Definizione 1.28 *Diciamo che una funzione u definita su un intervallo (anche illimitato) (a,b) è regolare a tratti, se l'intervallo (a,b) si può decomporre in un unione finita o numerabile di intervalli $I_n := (a_n, b_n)$ che abbiano in comune al più gli estremi, in modo che u sia derivabile all'interno di ogni I_n e la derivata u' (che risulta pertanto definita q.o. in (a,b)) sia* integrabile *su (a,b).*

Teorema 1.29 *Se la funzione complessa u, definita su (a,b), è* continua *e* regolare a tratti *sull'intervallo $[a,b]$ allora essa è assolutamente continua e quindi per ogni coppia di punti $x \le y \in (a,b)$ vale*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)\,dt.$$

Teorema 1.30 (Integrazione per parti) *Se u, v sono funzioni assolutamente continue sull'intervallo $[a,b]$, allora vale la formula*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \tag{1.44}$$

Teorema 1.31 (Derivazione sotto il segno di integrale) *Sia u una funzione complessa definita nel rettangolo $E := (a,b) \times (c,d)$ e supponiamo che la funzione integrale rispetto alla variabile y*

$$U(x) := \int_c^d u(x,y)\,dy$$

sia ben definita in (a,b), cioè che la funzione $y \mapsto u(x,y)$ sia integrabile rispetto a y in (c,d). Supponiamo che per quasi ogni $y \in (c,d)$ la funzione

$$x \mapsto u(x,y) \quad \textit{sia derivabile in } (a,b)$$

con

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right| \leq g(y), \qquad \int_c^d g(y)\,dy < +\infty.$$

Allora la funzione U è derivabile in (a,b) e si ha

$$U'(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\,dy \quad \forall\, x \in (a,b).$$