

Calendario orali: I risultati della prova scritta saranno esposti presso il Dip. di Matematica nella mattinata di giovedì 25/9.

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = (y(t))^3 - \frac{t^2}{2} & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Siano h un parametro positivo dato, $t_n = nh$ e u_n un'approssimazione di $y(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

1a) Applicare lo schema di Eulero Esplicito per la risoluzione numerica di un generico problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, ed enunciarne le proprietà di stabilità e consistenza. Applicarlo poi al problema (*) e calcolare u_1 .

1b) Applicare lo schema dei trapezi per la risoluzione numerica di un generico problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, ed enunciarne le proprietà di stabilità e consistenza. Applicarlo poi al problema (*). Detta u_1 l'approssimazione di $y(t_1)$ ottenuta con tale schema, calcolare un'approssimazione di u_1 applicando un passo del metodo di Newton, partendo da y_0 (condizione iniziale del problema (*)).

2. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ \beta & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

con α e β parametri reali. Dopo aver stabilito le condizioni di risolubilità del sistema,

2a) calcolare la fattorizzazione di Gauss $A = LU$;

2b) calcolare la fattorizzazione di Cholesky, indicando le condizioni che devono essere soddisfatte;

2c) determinare per quali valori di α e β il metodo di Jacobi converge.

2d) Calcolare la norma 1 e la norma ∞ della matrice data.

3. Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0, h]$, $h > 0$. Sia $I = \int_0^h f(x) dx$, e sia \tilde{I} l'approssimazione di I ottenuta con la formula del punto medio. Dare una maggiorazione per l'errore commesso $Err = |I - \tilde{I}|$.

Punti: esercizio 1a, 2a, 2b max 3 punti

esercizio 1b max 6 punti

esercizio 2c max 5 punti

esercizio 2d max 2 punti

esercizio 3 max 10 punti

Tempo a disposizione: 2 ore