

Cognome

Nome

Firma

Calendario orali: I risultati della prova scritta verranno esposti nel tardo pomeriggio presso il Dip. di Matematica. Gli orali e la registrazione dei voti si svolgeranno il giorno 29/3 presso il Dip. di Matematica alle ore 9:30.

1. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$, e sia α un numero reale. Si consideri la formula di quadratura:

$$\int_0^1 f(x) dx \simeq \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha) + \omega_3 f'(0) + \omega_4 f'(\alpha)$$

dove $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sono i pesi e α è un nodo.

1a) Trovare ω_i in funzione di α in modo che la formula considerata abbia ordine di precisione almeno 3.

1b) Dire qual è l'ordine di precisione massimo ottenibile con la formula data e per quali valori di α lo si raggiunge.

2.

2a) Data una funzione $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e dati m punti distinti x_1, x_2, \dots, x_m , sia $p(x)$ il polinomio di secondo grado che approssima f nel senso dei minimi quadrati rispetto ai nodi x_i . Si imponi il procedimento che consente di determinare $p(x)$.

2b) Sia $f(x) = \frac{x^2-4}{x-4}$ nell'intervallo $[-2, 2]$: applicare il procedimento illustrato al punto precedente per calcolare $p(x)$ dati i nodi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

3. Si scriva il metodo di Eulero implicito per la discretizzazione di un problema di Cauchy scalare, e si studi la consistenza (indicando l'ordine di consistenza) e la A-stabilità. Individuare inoltre la regione di A-stabilità del metodo.

Punti: esercizio 1a) max 5 punti

esercizio 1b) max 3 punti

esercizi 2a), 2b) max 6 punti

esercizio 3) max 12 punti

Tempo a disposizione: 2 ore