Esercitazioni di Metodi Numerici per l'Ingegneria

a.a. 2010-2011

Svolgere a scelta almeno uno dei seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$(P)\begin{cases} -u''(x)+\lambda u(x) \;=\; f(x) & \text{in } (a,b) \\ u(a)=\alpha, \qquad u'(b)=\beta \end{cases}$$

con $\lambda \geq 0$, α, β, a, b, f supposti dati. Si approssimi il problema con elementi finiti lineari a tratti e continui su una decomposizione uniforme di (a,b).

Scelta poi una funzione $u(x)$, calcolare i dati in modo che u sia soluzione di (P) (per costruire una soluzione esatta con cui confrontare la bontà della approssimazione).

1.a Verificare che, per $\lambda = 0$, la soluzione elementi finiti coincide con l'interpolata di u se il dato f è trattato opportunamente.

1.b Per $\lambda > 0$, sia u_h la soluzione approssimata, e u^I l'interpolata elementi finiti di u; calcolare l'errore relativo $\|u_h - u^I\|/\|u^I\|$, al variare del passo di discretizzazione h, nelle norme L^2 e H^1. Disegnare le curve dell'errore in doppia scala logaritmica e dedurre l'ordine di convergenza.

2) Scrivere un codice che utilizzi elementi finiti lineari conformi per risolvere il problema:

$$(P)\begin{cases} (-\kappa u'(x)+u(x))' \;=\; f(x) & \text{in } (a,b) \\ u(a)=\alpha, \qquad u(b)=\beta, \end{cases}$$

con $\kappa = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-3},\ 10^{-4},\ 10^{-6}$ e

2a): $f = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = 0.$

2b): $f = 1,\ \alpha = 0,\ \beta = 0.$

Con i dati relativi al punto **2a)**, si calcoli la soluzione esatta e la si confronti con la soluzione numerica ottenuta, disegnando l'andamento, al variare di h, dell'errore

$$||u_h - u^I||_0/||u^I||_0.$$

Si commentino i risultati ottenuti.

3) Scrivere un codice che utilizzi elementi finiti lineari conformi per risolvere il problema:

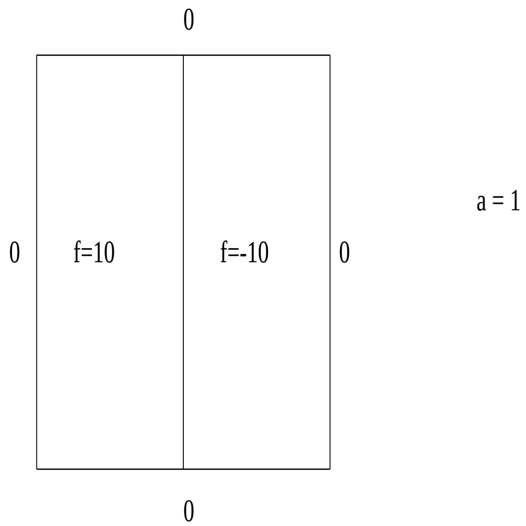
$$\begin{cases} -\kappa\Delta u + \lambda u \;=\; f \qquad \text{in } \Omega = [-1,1]^2 \\ u \;\; \text{assegnata su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

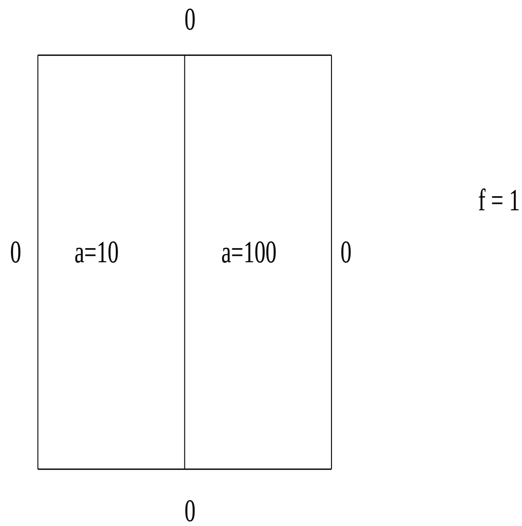
con $\kappa > 0$, $\lambda \geq 0$. Per validare il codice lo si applichi ad un caso in cui si conosce la soluzione esatta, e si tracci il grafico dell'errore relativo, in funzione del passo di discretizzazione h, nelle norme $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$. I risultati devono essere in accordo con quanto predetto dalla teoria.

4) Scrivere un codice che utilizzi elementi finiti lineari conformi per risolvere il problema:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x)\underline{\nabla} u) \;=\; f \qquad \text{in } \Omega = [-1,1]^2 \\ u \;=\; 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con i dati descritti nelle figure seguenti



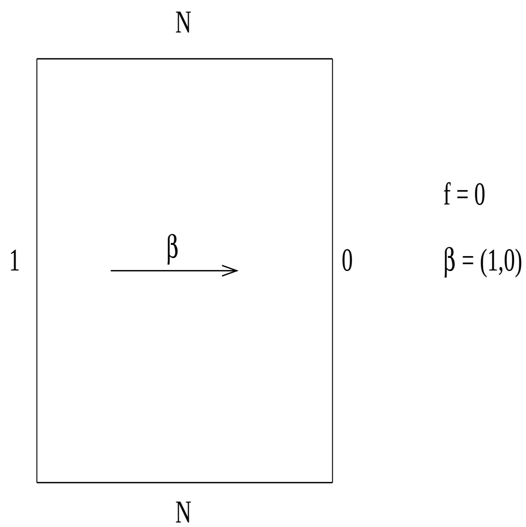


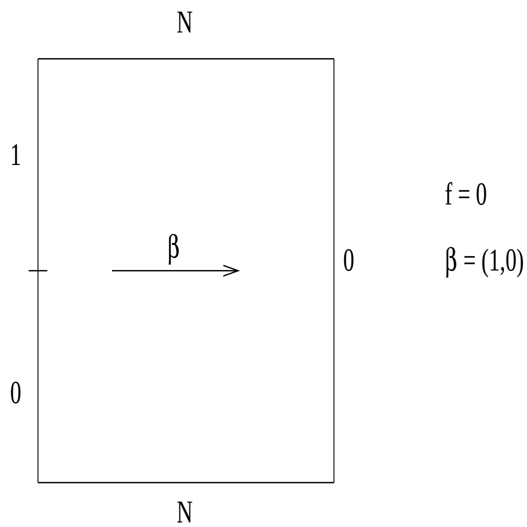
4a) Infine: $a = 1$, $\quad f = \delta_C$ (delta di Dirac nel centro).

5) Scrivere un codice che utilizzi elementi finiti lineari conformi per risolvere il problema:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta u + \underline{\beta}\cdot\underline{\nabla} u &= f \qquad \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u &= g \qquad \text{su } \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \qquad \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

con $\kappa = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-3},\ 10^{-4},\ 10^{-6}$, e gli altri dati specificati nelle figure seguenti (N sta per condizione di Neumann omogenea). Disegnare poi il grafico della soluzione ottenuta nei vari casi.





6) Si consideri una barra sottile, di lunghezza L, la cui temperatura in $x = 0$ è T_0, ed è termicamente isolata in $x = L$. Supponiamo la sezione costante di area A, e perimetro p. La temperatura u soddisfa il seguente problema di Dirichlet-Neumann:

$$\begin{cases} -\mu A u'' + \sigma p u \;=\; 0 \qquad \text{in } (0, L) \\ u(0) \;=\; T_0 \qquad u'(L) = 0 \end{cases}$$

dove μ è la conduttività termica, e σ un coefficiente di trasferimento convettivo. Si risolva il problema con elementi finiti lineari a tratti e continui su una griglia con passo uniforme h, supponendo che la lunghezza della barra sia $L = 100cm$ e che la sezione sia circolare con raggio $2cm$. Si ponga inoltre $\mu = 200$ e $T_0 = 10°C$. Riportare il grafico dell'andamento dell'errore (dopo aver calcolato la soluzione esatta) in funzione di h nelle norme $L^2(0, L)$ e $H^1(0, L)$.

7) Scrivere un codice che utilizzi elementi finiti lineari conformi per risolvere il problema:

$$\begin{cases} -(\alpha u')'(x) + (\beta u')(x) + (\gamma u)(x) \;=\; f(x) \qquad 0 < x < 1 \\ (\alpha u')(0) \;=\; w_0 \qquad (\alpha u')(1) \;=\; w_1 \end{cases}$$

con α, β, γ funzioni continue positive. Verificare il codice nel caso α, β, γ costanti, calcolando l'errore relativo $\|u_h - u^I\|/\|u^I\|$, al variare del passo di discretizzazione h, nelle norme $L^2(0, 1)$ e $H^1(0, 1)$.

Suggerimento: In ogni esercizio l'errore relativo può essere calcolato, anzichè nelle vere norme L^2 e H^1, nella norma seguente:

$$* \qquad ||v_h||_0 := \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{N} (v_h(x_i))^2 \Big)^{1/2}$$

$$||v_h||_1 := \text{norma dell'energia} = \Big(||v_h||_0^2 + ||\nabla v_h||_0^2 \Big)^{1/2}$$

(N = numero di nodi).

Facoltativo: Dimostrare che è equivalente misurare l'errore relativo nella norma $*$ o nella norma di L^2, con costanti di equivalenza indipendenti dal passo di discretizzazione h (cioè, per suddivisioni uniformi, da N).