METODI MATEMATICI per l'INGEGNERIA

APPELLO REGOLARE del 28 febbraio 2002

1) Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1 - z^2}.$$

a) Determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui;
b) dare lo sviluppo di Laurent della f centrato in $z = 0$, precisando il raggio di convergenza;
c) calcolare $\displaystyle\int_C f(z)dz$ dove C è la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio $R = \frac{1}{2}$, orientata in senso antiorario.

Soluzione. Abbiamo

$$z = 1 \quad \text{polo del primo ordine,} \quad \mathrm{Res}(f, 1) = -\frac{e}{2},$$

$$z = -1 \quad \text{polo del primo ordine,} \quad \mathrm{Res}(f, -1) = \frac{e^{-1}}{2},$$

$$z = 0 \quad \text{singolarità essenziale,} \quad \mathrm{Res}(f, 0) = \sinh 1,$$

$$z_\infty \quad \text{singolarità eliminabile,} \quad \mathrm{Res}(f, z_\infty) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} - \sinh 1 = \sinh 1 - \sinh 1 = 0.$$

Per quanto riguarda lo sviluppo di Laurent abbiamo $f(z) = \displaystyle\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{z^{-n+2k}}{n!}$ con $R = 1$.

Infine $\displaystyle\int_C f(z)\, dz = 2\pi\, i\, \mathrm{Res}(f, 1) = -\pi\, e\, i.$

2) Con metodi di analisi complessa, calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{3 + \sin t}\, dt.$$

Soluzione. Abbiamo

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{3 + \sin t}\, dt = \int_C \frac{2}{3 + \frac{z - 1/z}{2i}} \frac{dz}{iz},$$

dove C è la circonferenza unitaria di centro l'origine, orientata positivamente. Semplificando ci riduciamo a

$$I = 4 \int_C \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} = 4 \cdot 2\pi\, i \cdot \mathrm{Res}(f, (-3 + 2\sqrt{2})i) =$$

$$= \frac{8\pi\, i}{[z-(-3-2\sqrt{2})]}\Big|_{z=(-3+2\sqrt{2})i} = \sqrt{2}\,\pi.$$

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = |t|\chi_{[-1,1]}(t).$$

a) Verificare che f è Fourier-trasformabile.
b) Calcolare $\hat{f}$ esplicitamente.
c) Calcolare $|t|\chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-1,1]}(t)$. [**Suggerimento**: $(t|t|)' = 2|t|$.]

Soluzione. Poichè f è limitata e a supporto compatto, è immediato verificare che appartiene a $L^1(\mathbf{R})$ e ciò implica che f sia Fourier - trasformabile. Passando al calcolo esplicito della trasformata, abbiamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi\, t} f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi\, t}|t|\, dt = \int_{-1}^{1} |t|(\cos(\xi t) - i\sin(\xi t))\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 t\cos(\xi t)\, dt = 2\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{sin(\xi t)}{\xi}\, dt = 2\frac{sin\xi}{\xi} + 2\frac{\cos\xi - 1}{\xi^2}.$$

Infine, sfruttando il suggerimento,

$$|t|\chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-1,1]}(t) = \int_{\mathbf{R}} |s|\chi_{[-1,1]}(s)\cdot\chi_{[-1,1]}(t-s)\, ds = \int_{t-1}^{t+1} |s|\chi_{[-1,1]}(s)\, ds =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le -2 \\ \displaystyle\int_{-1}^{t+1} |s|\, ds = \frac{s|s|}{2}\Big|_{-1}^{t+1} = \frac{(t+1)|t+1|+1}{2} & \text{se } \quad -2 < t < 0 \\ \displaystyle\int_{t-1}^{1} |s|\, ds = \frac{s|s|}{2}\Big|_{t-1}^{1} = \frac{1-(t-1)|t-1|}{2} & \text{se } \quad 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

4) Utilizzando la $\mathcal{L}$-trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} tY'' + 2Y' + 9tY = F(t), \qquad t > 0 \\ Y(0) = Y'(0) = 0 \end{cases}$$

dove $F(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con $\lambda_a = 0$.

Soluzione. Trasformando membro a mebro, abbiamo

$$-\frac{d}{ds}(s^2\, y(s)) + 2s\, y(s) - 9\frac{d}{ds}(y(s)) = f(s)$$
$$-2s\, y(s) - s^2\, y'(s) + 2s\, y(s) - 9\, y'(s) = f(s) \quad \Rightarrow \quad -(s^2+9)\, y'(s) = f(s)$$
$$-y'(s) = \frac{1}{3}f(s)\frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(t\,Y(t)) = \frac{1}{3}\mathcal{L}(F(t) * H(t)\sin(3t))$$
$$\Rightarrow \quad Y(t) = \frac{1}{3t}\left[F(t) * H(t)\sin(3t)\right].$$