METODI MATEMATICI

APPELLO REGOLARE del 26 febbraio 2003

1) Con metodi di Analisi Complessa, calcolare i seguenti due integrali definiti

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{4+2\cos t}\,dt, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2-6x+25}\,dx.$$

Soluzione. Per quanto riguarda il primo integrale, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{4+2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}{4+e^{it}+e^{-it}}\,dt.$$

Posto

$$e^{it}=z \qquad ie^{it}\,dt=dz \qquad dt=\frac{dz}{iz}$$

ed indicata con $C_1(0)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio uno, orientata positivamente, l'integrale precedente diviene

$$\frac{1}{2}\int_{C_1(0)} \frac{z+\frac{1}{z}}{4+z+\frac{1}{z}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_{C_1(0)} \frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2i}2\pi i[Res(f,0)+Res(f,-2+\sqrt{3})] = \pi[1-\frac{2}{\sqrt{3}}].$$

Quanto al secondo integrale, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2-6x+25}\,dx = Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2-6x+25}\,dx =$$

$$= Re[2\pi i\,Res(f,3+4i)] = Re[2\pi i\frac{e^{6i}e^{-8}}{8i}] = \frac{\pi}{4}e^{-8}\cos 6.$$

2) Data la funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, periodica di periodo $T=2\pi$ definita da

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & -\pi<t<0, \\ \pi-t & 0\le t\le\pi \end{cases}$$

a) verificare che è sviluppabile in serie di Fourier;
b) calcolare l'espressione esplicita dei coefficienti;
c) studiare la convergenza della serie alla funzione;
d) utilizzare i risultati dei punti precedenti per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-)^{n+1}}{n^2}.$$

Soluzione. La funzione è periodica e limitata, dunque è certamente sviluppabile in serie di Fourier. Calcoliamo i coefficienti.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\,dt + \int_0^{\pi}(\pi - t)\,dt\right] = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos(nt)\,dt + \int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt\right] = \frac{1+(-)^{n+1}}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin(nt)\,dt + \int_0^{\pi}(\pi - t)\sin(nt)\,dt\right] = \frac{2+(-)^{n+1}}{n}.$$

È immediato riconoscere che la serie converge alla funzione nel senso dell'energia: possiamo dunque scrivere

$$f(t) \underset{E}{=} -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-)^{n+1}}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{2+(-)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale, la situazione è la seguente

a) $\forall t \neq k\pi \qquad S_N(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t);$

b) $\forall t = 2k\pi \qquad S_N(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f(2k\pi^+) + f(2k\pi^-)}{2} = 0;$

c) $\forall t = (2k+1)\pi \qquad S_N(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f((2k+1)\pi^+) + f((2k\pi+1)^-)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}.$

In particolare, dunque, se scegliamo $t = 0$, abbiamo

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-)^{n+1}}{\pi n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-)^{n+1}}{\pi n^2}.$$

3) Utilizzando la trasformata di Fourier, determinare la soluzione dell'equazione

$$-u'' - 6u' - 8u = e^{-3|t|}.$$

Soluzione. Trasformando entrambi i membri dell'equazione abbiamo

$$(\omega^2 - 6i\omega - 8)\hat{u} = \frac{6}{9+\omega^2},$$

da cui otteniamo

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega^2 - 6i\omega - 8}\cdot\frac{6}{\omega^2+9}.$$

Posto $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2 - 6i\omega - 8}$, abbiamo $u(t) = g(t) * e^{-3|t|}$. Calcoliamo l'espressione di $g(t)$. Abbiamo

$$\omega^2 - 6i\omega - 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{1,2} = 4i, 2i.$$

Applicando il teorema di inversione ed il Lemma di Jordan, otteniamo

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \dfrac{2\pi i}{2\pi}\left[Res(e^{i\omega t}\hat{g}(\omega), 4i) + Res(e^{i\omega t}\hat{g}(\omega), 2i)\right] & t \geq 0 \end{cases}$$

Dunque $g(t) = \frac{1}{2}H(t)[e^{-4t} - e^{-2t}]$. Possiamo allora calcolarel'espressione esplicita di $u(t)$. Abbiamo

$$u(t) = \frac{1}{2}H(t)(e^{-4t} - e^{-2t}) * e^{-3|t|} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-3|s|}H(t-s)(e^{-4(t-s)} - e^{-2(t-s)})\, ds =$$

$$= \frac{e^{-4t}}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-3|s|+4s}\, ds - \frac{e^{-2t}}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-3|s|+2s}\, ds = \begin{cases} -\dfrac{e^{3t}}{35} & t < 0; \\ e^{-3t} - \dfrac{3}{7}e^{-4t} - \dfrac{3}{5}e^{-2t} & t \geq 0. \end{cases}$$

4) Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni, precisando per ognuna l'ascissa di assoluta convergenza

a) $F_1(t) = \dfrac{d}{dt}[J_0(3t) * J_0(4t)]$;

b) $F_2(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$;

c) $F_3(t) = H(t)\, t\, \sinh(3t)$;

d) $F_4(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t+2 & 0 < t \leq 1 \\ e^t & 1 < t \leq 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$.

Soluzione. Posto $G(t) = J_0(3t) * J_0(4t)$ è immediato osservare che $G(0^+) = 0$ (per la definizione stessa di convoluzione). Per questo motivo abbiamo

$$f_1(s) = s\, g(s) - G(0^+) = s\, g(s) = s\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{(\frac{s}{3})^2 + 1}} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(\frac{s}{4})^2 + 1}} =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{(s^2+9)(s^2+16)}}, \qquad \lambda_1 = 0;$$

$$F_2(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \qquad \Rightarrow \qquad f_2(s) = \frac{1}{s}(\frac{\pi}{2} - \text{arctan}s), \quad \lambda_2 = 0;$$

$$F_3(t) = H(t)\, t\, \sinh(3t) \qquad \Rightarrow \qquad f_3(s) = -\frac{d}{ds}\frac{3}{s^2-9} = \frac{6s}{(s^2-9)^2}, \quad \lambda_3 = 3;$$

Infine

$$F_4(t) = [H(t) - H(t-1)](t+2) + [H(t-1) - H(t-2)]e^t + 2H(t-2) =$$

$$= t\, H(t) + 2H(t) - H(t-1)(t-1) - 3H(t-1) + eH(t-1)e^{t-1} - e^2 H(t-2)e^{t-2} + 2H(t-2).$$

Da qui, trasformando a blocchi, otteniamo

$$f_4(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} - 3\frac{e^{-s}}{s} + e\frac{e^{-s}}{s-1} - e^2\frac{e^{-2s}}{s-1} + 2\frac{e^{-2s}}{s}, \quad \lambda_4 = 0.$$