

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z-i}{z+1} \right)^n$$

precisando se è aperto o chiuso.

Soluzione. Ponendo $t = \left(\frac{z-i}{z+1} \right)$ si trova che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} t^n$ ha raggio di convergenza $R = 3$. Inoltre è facile vedere che la serie converge anche per $|t| = 3$. In definitiva, dunque, l'insieme di convergenza (chiuso!) è $\left| \frac{z-i}{z+1} \right| \leq 3$, da cui, ponendo come al solito $z = x + iy$, si ricava $(x + \frac{9}{8})^2 + (y + \frac{1}{8})^2 \geq \frac{18}{64}$.

2) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n+3)} \left(\frac{z-2}{z-2i} \right)^n.$$

Soluzione. Ponendo $t = \left(\frac{z-2}{z-2i} \right)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n+3)} t^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Anche in questo caso è facile verificare che la serie converge per $|t| \leq 1$. Si conclude, dunque, che la serie di partenza converge per $\left| \frac{z-2}{z-2i} \right| \leq 1$, da cui si ricava $x \geq y$.

3) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$(-7)^z = 49i.$$

Soluzione. Si trova $z = \frac{\log(49i)}{\log(-7)}$ che si riscrive $z = \frac{\ln(49) + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}{\ln(7) + i(\pi + 2k\pi)}$.

4) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\sin z = 3.$$

Soluzione. L'equazione precedente si riscrive $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$, da cui, ponendo $e^{iz} = t$, ricaviamo $t^2 - 6it - 1 = 0$, che ha soluzioni $t_{1,2} = (3 \pm 2\sqrt{2})i$. Risostituendo la variabile z , otteniamo finalmente $z_1 = \frac{1}{i}[\ln(3 + 2\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)]$, $z_2 = \frac{1}{i}[\ln(3 - 2\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)]$.

5) Determinare la funzione olomorfa $f = u + iv$ sapendo che $f(0, 0) = 0$ e

$$u(x, y) = x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y.$$

Soluzione. Dalle equazioni di Cauchy - Riemann, si ricava facilmente

$$v_x = -x \cos x \sinh y - \sin x \sinh y - y \sin x \cosh y,$$

$$v_y = \cos x \cosh y - x \sin x \cosh y + y \cos x \sinh y,$$

da cui, tenendo conto della condizione $f(0, 0) = 0$, otteniamo

$$v = \int_0^y v_y(x, t) dt + \int_0^x v_x(t, 0) dt = \int_0^y v_y(x, t) dt = y \cosh y \cos x - x \sin x \sinh y.$$

Ponendo, infine $f = u + iv$, si ricava facilmente $f(z) = z \cos z$.

6) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\pi z)}{z^2 + 1}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e valutare $\int_C f(z) dz$ dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio $5/4$ orientata positivamente.

Soluzione. Si ricava

$$z = i \quad \text{polo di ordine 1,} \quad \text{Res}(f; i) = \frac{\tan(\pi i)}{2i};$$

$$z = -i \quad \text{polo di ordine 1,} \quad \text{Res}(f; -i) = \frac{\tan(\pi i)}{2i};$$

$$z = \frac{1}{2} + k \quad \text{polo di ordine 1,} \quad \text{Res}(f; \frac{1}{2} + k) = -\frac{1}{\pi[(\frac{1}{2} + k)^2 + 1]};$$

z_∞ singolarità non isolata;

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; -i) + \text{Res}(f; \frac{1}{2}) + \text{Res}(f; -\frac{1}{2})] = 2\pi i [2 \frac{\tan \pi i}{2i} - \frac{8}{5\pi}].$$

7) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 e^{i/z}}{(z-1)^2}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$, precisandone il disco forato di convergenza.

Soluzione. Si ricava

$$z = 1 \quad \text{polo di ordine 2,} \quad \text{Res}(f; 1) = (2 - i)e^i;$$

$$z_\infty \text{ sing. elim.}, \quad \text{Res}(f, z_\infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = \text{Res}\left(-\frac{e^{iz}}{z^2(z-1)^2}; 0\right) = -(i+2);$$

$$z = 0 \text{ singolarità essenziale} \quad \text{Res}(f; 0) = (i+2) - (2-i)e^i;$$

$$f(z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-)^k i^n}{n!} \binom{-2}{k} z^{k-n+2} \quad \text{in } 0 < |z| < 1.$$

8) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(z^3 - 2z) \cos(\pi z)}{z^2 + 4}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$.

Soluzione. Si ricava

$$z = 2i \text{ polo di ordine 1,} \quad \text{Res}(f; 2i) = -3 \cos(2\pi i);$$

$$z = -2i \text{ polo di ordine 1,} \quad \text{Res}(f; -2i) = -3 \cos(2\pi i);$$

$$z_\infty \text{ singolarità essenziale,} \quad \text{Res}(f; z_\infty) = 6 \cos(2\pi i);$$

$$f(z) = (z^3 - 2z) \sum_{n,k=0}^{\infty} (-)^{n+k} \frac{\pi^{2n} 4^k}{(2n)!} z^{2n-2k-2} \quad \text{in } |z| > 2.$$

9) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2x^2}{x^4 + 1} dx, \quad \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 1}{x^3 - 8} dx.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2x^2}{x^4 + 1} dx = 2\pi i [\text{Res}\left(\frac{z + 2z^2}{z^4 + 1}; \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) + \text{Res}\left(\frac{z + 2z^2}{z^4 + 1}; \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)];$$

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 1}{x^3 - 8} dx = \pi i \text{Res}\left(\frac{z + 1}{z^3 - 8}; 2\right) + 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z + 1}{z^3 - 8}; -1 + i\sqrt{3}\right).$$

10) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x} dx.$$

Soluzione. Utilizzando la formula di Eulero e l'usuale sostituzione $z = e^{ix}$, posto $C_1(0)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 orientata positivamente, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int_{C_1(0)} \frac{z^2 - 1}{z(z^2 - 3z + 1)} dz = \\ &= \pi i [Res(\frac{z^2 - 1}{z(z^2 - 3z + 1)}; 0) + Res(\frac{z^2 - 1}{z(z^2 - 3z + 1)}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2})] = 0. \end{aligned}$$

Si poteva ricavare più direttamente il valore dell'integrale osservando che si tratta dell'integrale di una funzione dispari e periodica di periodo $T = 2\pi$ (dunque a media nulla) su un intero periodo!

11) Utilizzando il Lemma di Jordan ed il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 6x + 14} dx.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 6x + 14} dx = Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 - 6x + 14} dx = Re[2\pi i Res(\frac{e^{2iz}}{z^2 - 6z + 14}; 3 + i\sqrt{5})].$$

12) Si consideri la funzione pari, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(t - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f , studiarne la convergenza puntuale e in particolare valutare la somma della serie in $t = -\frac{3}{4}\pi$.

Soluzione. È facile verificare che si tratta di una funzione di classe C^1 a tratti. Dunque la serie converge puntualmente alla funzione in ogni punto dell'asse reale. Inoltre, essendo f pari, avremo uno sviluppo di soli coseni. Risulta

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \left[2 \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n^2} + \frac{4}{\pi} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3} \right].$$

In $t = -\frac{3}{4}\pi$ la serie converge a $f(-\frac{3}{4}\pi)$ per quanto detto sopra. Sfruttando inoltre la parità della funzione, abbiamo $f(-\frac{3}{4}\pi) = f(\frac{3}{4}\pi) = \frac{\pi}{8}$.

13) Si consideri la funzione 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t & -\pi < t \leq 0 \\ 0 & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f , studiarne la convergenza puntuale e utilizzando un opportuno punto valutare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.

Soluzione. Come si vede facilmente dal grafico, in tutti i punti $t \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, la funzione è continua e derivabile o continua e dotata di derivata destra e sinistra. Pertanto in tutti tali punti, la serie converge puntualmente alla funzione. Nei punti $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, la funzione ha un salto finito ed è dotata di pseudoderivate destra e sinistra. In tali punti, perciò, avremo $S(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = -\frac{\pi}{2}$. Inoltre

$$f(t) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

Se scegliamo $t = 0$ otteniamo $\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.

14) Si consideri la funzione pari, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = (t - \pi)^2, \quad 0 < t < \pi.$$

Scrivene lo sviluppo di Fourier ed utilizzando l'uguaglianza di Parseval calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Soluzione. Poichè si tratta di una funzione pari, avremo uno sviluppo di Fourier di soli coseni. Inoltre (benché non serva in questo caso) si può osservare che abbiamo una funzione di classe C^1 a tratti, per cui la serie converge alla funzione in ogni punto dell'asse reale. Infine è immediato verificare che la funzione è a quadrato integrabile. Per quanto riguarda lo sviluppo abbiamo

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nt).$$

Applicando l'uguaglianza di Parseval, otteniamo infine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.