

METODI MATEMATICI

PRIMA PROVA in ITINERE del 17 novembre 2003

9) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z e^{\frac{z}{2}}}{4 + z^2}.$$

Senza trascurare z_∞ , determinare le singolarità, classificarle, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

Soluzione. Risulta

$$z = 0 \text{ singolarità essenziale, } Res(f, 0) = 1 - \cos 1$$

$$z = 2i \text{ polo del primo ordine, } Res(f, 2i) = \frac{e^{-i}}{2}$$

$$z = -2i \text{ polo del primo ordine, } Res(f, -2i) = \frac{e^i}{2}$$

$$z_\infty \text{ singolarità eliminabile, } Res(f, z_\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -1$$

Infine

$$f(z) = \frac{z}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \left(\frac{z^2}{4}\right)^k = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{n! 2^{2k+2-n}} z^{2k-n+1}, \quad 0 < |z| < 2.$$

10) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cos \frac{9}{z}}{(z+9)(z-\frac{9}{2})}.$$

Senza trascurare z_∞ , determinare le singolarità, classificarle, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

Soluzione. Risulta

$$z = 0 \text{ singolarità essenziale, } Res(f, 0) = \frac{2(\cos 1 - \cos 2)}{27}$$

$$z = -9 \text{ polo del primo ordine, } Res(f, -9) = -\frac{2 \cos 1}{27}$$

$$z = \frac{9}{2} \text{ polo del primo ordine, } Res(f, \frac{9}{2}) = \frac{2 \cos 2}{27}$$

$$z_\infty \text{ singolarità eliminabile, } Res(f, z_\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$$

Infine

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n 9^{2n} \frac{z^{-2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \left(\frac{9}{z}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{9}{2z}\right)^j, \quad |z| > 9.$$