M E T. M A T.	cognome e nome	firma
appello del 12 febbraio 2003		

1. Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z\,\sin(3z)}{z^4 - 16}.$$

a) Determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui;
b) dare lo sviluppo di Taylor della f centrato in $z = 0$, precisando il raggio di convergenza;
c) scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in zero, precisando il raggio di convergenza;
d) data l'ellisse E di centro l'origine e semiassi $a = 3$ e $b = 1$, orientata positivamente, calcolare $\int_E f(z)\,dz$.

Fino a punti 8

---

2. Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\cos(2t)}{9 + t^2},$$

a) verificare che è $\mathcal{F}$-trasformabile;
b) studiare a priori le proprietà della $\mathcal{F}$-trasformata, con particolare attenzione alla regolarità e al comportamento all'infinito;
c) calcolare esplicitamente l'espressione di $\hat{f}$;
d) utilizzare il Teorema di Plancherel e i risultati del punto precedente per calcolare

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos^2(2t)}{(9 + t^2)^2}.$$

Fino a punti 8

---

3. Verificare che in un opportuno semipiano del piano complesso ciascuna delle seguenti tre funzioni è la $\mathcal{L}$-trasformata di una funzione:

a) $f_1(s) = \dfrac{(s^2 + 3s)\,e^{-4s}}{(s^2 - 4)^2}$;

b) $f_2(s) = \dfrac{2 + \log(s^2)}{4s}$;

c) $f_3(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2s + 2}$.

Per ciascuna delle f_i, inoltre, calcolare la corrispondente antitrasformata F_i.

Fino a punti 8

---

4. Utilizzando la trasformata di Fourier e le relative tabelle, risolvere formalmente la seguente equazione integro - differenziale

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|s|}\,u(t-s)\,ds + u - \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-|s|}\,e^{-\sqrt{2}|t-s|}\,ds\right).$$

Fino a punti 8

Tempo: **3.00 ore**	spazio riservato alla commissione	1. ☐	2. ☐	3. ☐	4. ☐	totale ☐