METODI MATEMATICI - SEDE DI MANTOVA
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 31 GENNAIO 2006

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = 4t\chi_{[-2,2]}(t) + 7\chi_{[-4,-2]}(t) - 7\chi_{[2,4]}(t).$$

Verificare che f è $\mathcal{F}-$trasformabile, studiare a priori le proprietà di $\hat{f}$ e poi calcolare esplicitamente $\hat{f}$.

2) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = e^{-7|t|}(1 - 5t^2)\cos(3t),$$

dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, calcolare esplicitamente $\hat{f}$, utilizzando le relazioni fondamentali.

3) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sin(t+7)}{t^2 + 14t + 98}.$$

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{e^{-4it}}{(5 - it)(9 + it)}.$$

a) Verificare che f è trasformabile secondo Fourier.
b) Utilizzando opportunamente le relazioni fondamentali, calcolare $\hat{f}$.
c) Applicare il Teorema di Plancherel per calcolare

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(25 + t^2)(81 + t^2)}\, dt.$$

5) Data la funzione

$$f(t) = (7 - t)\chi_{[-1,1]}(t) * 8\chi_{[-2,2]}(t),$$

calcolare la sua espressione esplicita, specificando l'ampiezza del supporto.

6) Data la funzione

$$f(t) = H(t)\cos(5t) * H(t)e^{-7t},$$

calcolare la sua espressione esplicita, specificando l'ampiezza del supporto. Confrontare, poi, il risultato così ottenuto con quello che si ricava applicando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Laplace.

7) Utilizzare la trasformata di Fourier per calcolare l'espressione della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{1}{9 - it} * \frac{1}{7 + it}.$$

8) Dopo aver verificato che ciascuna delle seguenti funzioni è una trasformata di Laplace in un opportuno semipiano $\mathrm{Re}s > \lambda$, determinare la $F(t)$ corrispondente

a) $f_1(s) = \dfrac{s\,e^{-s}}{s^2 + 5s + 6}$;

b) $f_2(s) = \dfrac{s^2 + 1}{(s-2)(s^2+4)}$;

c) $f_3(s) = \dfrac{s - 2}{s^3 - 125}$;

d) $f_4(s) = \log\left(\dfrac{s + 3i}{s - 5i}\right)$.

9) Calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata delle seguenti funzioni, precisando per ciascuna di esse l'ascissa di convergenza

a) $F_1(t) = \dfrac{e^{-3t} - e^{-2t}}{t}$;

b) $F_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 + 2t & 0 \le t < 1 \\ 7 & 1 \le t < 2, \end{cases}$ periodica con $T = 2$ se $t > 0$;

c) $F_3(t) = H(t)\, t\, J_0(2t) * H(t)\cos(2t)$;

d) $F_4(t) = H(t)(\cosh^2(2t) - \sinh^2(4t))$.

10) Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la funzione $Y \in E$ soluzione di

$$2Y(t) * H(t)\sin(5t) + 2Y(t) = 6H(t)e^{3t}, \qquad t > 0.$$

11) Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvere il seguente Problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} X''(t) - 11X'(t) + 30X(t) = 5H(t)t^2 & t > 0, \\ X(0) = 1, \ X'(0) = 2. \end{cases}$$