

- 1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t) = (4 - t^2)\chi_{[-2,2]}$. Studiare a priori le proprietà di \hat{f} con particolare riguardo al comportamento all'infinito e alla regolarità e poi calcolare esplicitamente \hat{f} .

- 2) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{1 - \sin t}{t^2 - 6t + 13}.$$

- 3) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = (1 + 9t^2)e^{-2|t|}.$$

- 4) Sia data la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da $f(t) = \frac{1}{(t + 2i)(t - i)}$.

- a) Verificare che f è trasformabile secondo Fourier;
 b) calcolare \hat{f} ;
 c) applicare il Teorema di Plancherel alla f per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 4)(t^2 + 1)} dt.$$

- 5) Utilizzare la trasformata di Fourier per risolvere l'equazione differenziale

$$-u'' + u = \chi_{[0,+\infty[} e^{-t}.$$

- 6) Data la funzione $f(t) = (\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-2,2]} \frac{1}{4 + t^2})(t)$, calcolare la sua espressione esplicita, indicando l'ampiezza del supporto.

- 7) Utilizzando opportunamente le tabelle delle \mathcal{F} -trasformate, calcolare l'espressione di $f(t) = (\chi_{[0,2]} * \chi_{[-2,0]})(t)$.

- 8) Per le seguenti funzioni di variabile complessa, indicare quale di esse è, in un opportuno semipiano del tipo $\operatorname{Re} s > \lambda$, la \mathcal{L} -trasformata di una funzione $F(t)$. Dare poi l'espressione di $F(t)$ in almeno uno dei casi.

$$f_1(s) = \tan s, \quad f_2(s) = \frac{1}{s - e^{-s}}, \quad f_3(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}, \quad f_4(s) = \frac{\log(s + 1)}{(s + 1)^2}.$$

- 9) Calcolare le \mathcal{L} -trasformate delle seguenti funzioni, precisando per ognuna di esse l'ascissa di convergenza assoluta.

$$F_1(t) = H(t) \frac{1 - \cos(2t)}{t^{1/2}};$$
$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 & 0 < t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{periodica con } T = 2 \text{ se } t \geq 0;$$
$$F_3(t) = H(t) \frac{\sin(4t) - \sin(3t)}{t},$$

- 10) Risolvere con la \mathcal{L} -trasformata il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} X''(t) + X'(t) + X(t) = H(t), & t > 0, \\ X(0) = X'(0) = 0. \end{cases}$$

- 11) Risolvere con la \mathcal{L} -trasformata la seguente equazione di convoluzione

$$\begin{cases} (Y * Y' * Y'')(t) = H(t) e^{2t} \frac{t^2}{2}, & t > 0, \\ Y(0) = Y'(0) = 0. \end{cases}$$