METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 29 GENNAIO 2007

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = (9 - t^2)\chi_{[-3,0[}(t) + (t^2 - 9)\chi_{[0,3]}(t).$$

a) Tracciare il grafico della funzione $f$.
b) Verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
c) Verificare inoltre che $\forall\, n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$.
d) Dedurre da b) e c) che $\forall\, n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
e) Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{1}{(t + 3i)(t - 9i)}.$$

a) Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$.
b) Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
c) Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 9)(t^2 + 81)}\, dt.$$

3) Utilizzando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = \frac{\sin 3t}{t} * \frac{1 - \cos 3t}{t^2}.$$

4) Utilizzando la definizione, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = (25 - t^2)\chi_{[-5,5]}(t) * \chi_{[-5,5]}(t),$$

precisando l'ampiezza del supporto di $f$.

5) Dopo aver verificato che ciascuna delle seguenti funzioni è una trasformata di Laplace in un opportuno semipiano del tipo $\mathrm{Re}\, s > \lambda$, determinare la corrispondente funzione $F \in E$:
a) $f_1(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2 - 7s + 12}$.
b) $f_2(s) = \log\left(\dfrac{s^2 - 16}{s^2 + 16}\right)$.
c) $f_3(s) = \dfrac{1}{s(s^2 - 4s + 8)}$.
d) $f_4(s) = \dfrac{2s - 11}{(s^2 - 5s + 6)^2}$.

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy in avanti (per $t > 0$)

$$\begin{cases} u'''(t) + 5u''(t) + 6u'(t) = 18H(t), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 9. \end{cases}$$