

METODI MATEMATICI  
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 29 GENNAIO 2007

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

- 1) Si consideri la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definita da

$$f(t) = (4 - t^2)\chi_{[-2,0]}(t) + (t^2 - 4)\chi_{[0,2]}(t).$$

- Tracciare il grafico della funzione  $f$ .
- Verificare che  $f \in L^1(\mathbf{R})$ .
- Verificare inoltre che  $\forall n \in \mathbf{N}$  risulta  $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$ .
- Dedurre da b) e c) che  $\forall n \in \mathbf{N}$  risulta  $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$ .
- Calcolare esplicitamente  $\hat{f}(\omega)$ .

- 2) Si consideri la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  definita da

$$f(t) = \frac{1}{(t - 2i)(t + 4i)}.$$

- Verificare che  $f \in L^2(\mathbf{R})$ .
- Calcolare esplicitamente  $\hat{f}(\omega)$ .
- Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 4)(t^2 + 16)} dt.$$

- 3) Utilizzando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{t} * \frac{1 - \cos 2t}{t^2}.$$

- 4) Utilizzando la definizione, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = (16 - t^2)\chi_{[-4,4]}(t) * \chi_{[-4,4]}(t),$$

precisando l'ampiezza del supporto di  $f$ .

- 5) Dopo aver verificato che ciascuna delle seguenti funzioni è una trasformata di Laplace in un opportuno semipiano del tipo  $\operatorname{Re} s > \lambda$ , determinare la corrispondente funzione  $F \in E$ :

- $f_1(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 5s + 6}$ .
- $f_2(s) = \log \left( \frac{s^2 - 9}{s^2 + 9} \right)$ .
- $f_3(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}$ .
- $f_4(s) = \frac{2s + 3}{(s^2 - 5s + 4)^2}$ .

- 6) Risolvere il seguente problema di Cauchy in avanti (per  $t > 0$ )

$$\begin{cases} u'''(t) + 3u''(t) + 2u'(t) = 4H(t), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 2. \end{cases}$$