

METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 28 GENNAIO 2008

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t) = t(t-2)\chi_{[0,2]}(t)$.

- Tracciare il grafico della funzione f e verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
- Verificare inoltre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$ e dedurne che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
- Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

2) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da $f(t) = \frac{t}{(t+4i)(t-6i)}$.

- Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$ e calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
- Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+16)(t^2+36)} dt.$$

3) Utilizzando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione della funzione $f(t) = (2-|t|)_+ * \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sin(2t)}{t} \right) \right]$.

4) **Con la definizione**, calcolare l'espressione di $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * (4+t)\chi_{[-2,2]}(t)$.

5) Calcolare la \mathcal{L} -trasformata delle seguenti funzioni, **precisando per ciascuna** λ_F :

a) $F_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 3 & 0 \leq t < 2 \\ e^{2t} & 2 \leq t < 4 \end{cases}$ **periodica con** $T = 4$.

b) $F_2(t) = H(t) \frac{\sin 2t}{t} e^{-3t}$.

c) $F_3(t) = H(t-4) * H(t)t^3 * H(t-3)e^{-2t}$.

6) Utilizzando la \mathcal{L} -trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy per $t > 0$

$$U^{IV}(t) - 2U'''(t) - 3U''(t) + 4U'(t) + 4U(t) = H(t), \quad U(0) = U'(0) = U''(0) = U'''(0) = 0.$$

7) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 4(t+\pi) & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ 2\pi & \text{se } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, darne lo sviluppo in forma trigonometrica. Discutere la convergenza puntuale della serie alla funzione e utilizzare la convergenza in $t = 0$ per determinare il valore della somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$