METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 28 GENNAIO 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = t(t+2)\,\chi_{[-2,0]}(t)$.

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
b) Verificare inoltre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$ e dedurne che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
c) Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da $f(t) = \dfrac{t}{(t-3i)(t+5i)}$.

a) Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$ e calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
b) Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+9)(t^2+25)}\, dt.$$

3) Utilizzando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione della funzione $f(t) = (3-|t|)_+ * \left[\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\sin(3t)}{t}\right)\right]$.

4) **Con la definizione**, calcolare l'espressione di $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * (9+t)\chi_{[-3,3]}(t)$.

5) Calcolare la $\mathcal{L}$–trasformata delle seguenti funzioni, **precisando per ciascuna** λ_F:

a) $F_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0, \\ 2 & 0 \le t < 1 \\ e^t & 1 \le t < 2 \end{cases}$ **periodica con** $T = 2$.

b) $F_2(t) = H(t)\dfrac{\sin 3t}{t}\, e^{-2t}$.

c) $F_3(t) = H(t-3) * H(t)t^2 * H(t-2)e^{-3t}$.

6) Utilizzando la $\mathcal{L}$–trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy per $t > 0$
$U^{IV}(t) + 2U'''(t) - 3U''(t) - 4U'(t) + 4U(t) = H(t), \quad U(0) = U'(0) = U''(0) = U'''(0) = 0.$

7) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 3(t+\pi) & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ \pi & \text{se } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, darne lo sviluppo in forma trigonometrica. Discutere la convergenza puntuale della serie alla funzione e utilizzare la convergenza in $t = 0$ per determinare il valore della somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.