METODI MATEMATICI

SECONDA PROVA IN ITINERE del 27 gennaio 2003

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = (t+2)^2 \chi_{[-2,-1]} + \chi_{]-1,1[} + (t-2)^2 \chi_{[1,2]}$. Studiare a priori le proprietà di $\hat{f}$, con particolare riguardo al comportamento all'infinito e alla regolarità, e poi calcolare esplicitamente $\hat{f}$.

2) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\cos^2(2t)}{t^2 - 14t + 65}.$$

[**Suggerimento**: sviluppare il coseno utilizzando la formula di Eulero].

3) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = (4 + 9t^2) \frac{\sin t}{3t} e^{-|t|}.$$

4) Sia data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = \frac{1}{(2t+5i)^2}$.

a) Verificare che f è trasformabile secondo Fourier;

b) calcolare esplicitamente $\hat{f}$;

c) applicare alla f il Teorema di Plancherel per calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4t^2+25)^2}\, dt$.

5) Utilizzare la trasformata di Fourier per risolvere l'equazione differenziale

$$-u'' - 2u' + 15u = f, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}).$$

[**Suggerimento**: lasciare indicato il risultato finale come convoluzione, limitandosi ad antitrasformare la funzione risultante dal termine di sinistra].

6) Indicare l'ampiezza del supporto e calcolare l'espressione esplicita della funzione

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-3,3]}(t) \ln(\frac{|t|}{3}).$$

[**Suggerimento**: integrando per parti calcolare la primitiva della funzione $\ln(\frac{|t|}{3})$].

7) Utilizzando opportunamente la tabella delle $\mathcal{F}$-trasformate, calcolare l'espressione di

$$f(t) = e^{-3|t|} * e^{-4|t|}.$$

8) Per le seguenti funzioni di variabile complessa, indicare quale di esse è, in un opportuno semipiano del tipo Re $s > \lambda$, la $\mathcal{L}$-trasformata di una funzione $F(t)$. Dare poi l'espressione di $F(t)$ in almeno uno dei casi

$$f_1(s) = \pi - 2\arctan s, \quad f_2(s) = \frac{s^2}{s^2+s+2}, \quad f_3(s) = \frac{\log(s+3)}{s(s+2)}, \quad f_4(s) = \frac{2s-1}{(s^2-s)^2}.$$

9) Calcolare le $\mathcal{L}$-trasformate delle seguenti funzioni, precisando per ognuna di esse l'ascissa di convergenza assoluta:

$$F_1(t) = \frac{H(t-1)}{\sqrt{t-1}}\cosh(2t);$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad \text{periodica con } T = 2 \text{ se } t \ge 0;$$

$$F_3(t) = H(t)\frac{\sinh(3t)}{2t} * H(t)J_0(4t).$$

10) Risolvere con la $\mathcal{L}$-trasformata il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'' + 2X' + X = H(t)\,t\,e^t & t > 0, \\ X(0) = X'(0) = 0. \end{cases}$$

11) Risolvere con la $\mathcal{L}$-trasformata la seguente equazione di convoluzione

$$\begin{cases} 4Y * Y' + Y' * Y'' = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \sin(2\tau)\,d\tau, & t > 0, \\ Y(0) = Y'(0) = 0. \end{cases}$$