

- 1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t) = (t+3)^2 \chi_{[-3,-1]} + 4\chi_{]-1,1[} + (t-3)^2 \chi_{[1,3]}$. Studiare a priori le proprietà di \hat{f} , con particolare riguardo al comportamento all'infinito e alla regolarità, e poi calcolare esplicitamente \hat{f} .
- 2) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sin^2(3t)}{t^2 + 14t + 65}.$$

[**Suggerimento:** sviluppare il seno utilizzando la formula di Eulero].

- 3) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = (9 + 4t^2) \frac{\sin t}{2t} e^{-|t|}.$$

- 4) Sia data la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t) = \frac{1}{(2t+3i)^2}$.

a) Verificare che f è trasformabile secondo Fourier;

b) calcolare esplicitamente \hat{f} ;

c) applicare alla f il Teorema di Plancherel per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4t^2 + 9)^2} dt$.

- 5) Utilizzare la trasformata di Fourier per risolvere l'equazione differenziale

$$-u'' + 2u' + 8u = f, \quad f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

[**Suggerimento:** lasciare indicato il risultato finale come convoluzione, limitandosi ad antitrasformare la funzione risultante dal termine di sinistra].

- 6) Indicare l'ampiezza del supporto e calcolare l'espressione esplicita della funzione

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-2,2]}(t) \ln\left(\frac{|t|}{2}\right).$$

[**Suggerimento:** integrando per parti calcolare la primitiva della funzione $\ln\left(\frac{|t|}{2}\right)$].

- 7) Utilizzando opportunamente la tabella delle \mathcal{F} -trasformate, calcolare l'espressione di

$$f(t) = e^{-2|t|} * e^{-3|t|}.$$

- 8) Per le seguenti funzioni di variabile complessa, indicare quale di esse è, in un opportuno semipiano del tipo $\operatorname{Re} s > \lambda$, la \mathcal{L} -trasformata di una funzione $F(t)$. Dare poi l'espressione di $F(t)$ in almeno uno dei casi

$$f_1(s) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan s, \quad f_2(s) = \frac{s^2}{s^2 - s + 2},$$

$$f_3(s) = \frac{\log(s+4)}{(s-1)(s+2)}, \quad f_4(s) = \frac{2s+3}{(s^2+3s)^2}.$$

- 9) Calcolare le \mathcal{L} -trasformate delle seguenti funzioni, precisando per ognuna di esse l'ascissa di convergenza assoluta:

$$F_1(t) = \frac{H(t-2)}{\sqrt{t-2}} \cosh(3t);$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -2t & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{periodica con } T = 2 \text{ se } t \geq 0;$$

$$F_3(t) = H(t) \frac{\sinh(2t)}{4t} * H(t) J_0(3t).$$

- 10) Risolvere con la \mathcal{L} -trasformata il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'' - 2X' + X = H(t) t e^{-t} & t > 0, \\ X(0) = X'(0) = 0. \end{cases}$$

- 11) Risolvere con la \mathcal{L} -trasformata la seguente equazione di convoluzione

$$\begin{cases} 9Y * Y' + Y' * Y'' = \frac{1}{3} \int_0^t \sin(3\tau) d\tau, & t > 0, \\ Y(0) = Y'(0) = 0. \end{cases}$$