METODI MATEMATICI
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 26 NOVEMBRE 2007

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{3z^2} - 1}{2z^3(z-5)}.$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità, classificarle e calcolare i relativi residui. Scrivere, inoltre, lo sviluppo di Laurent della f relativo a $z = 0$.

2) Con metodi di Analisi Complessa, calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{9 - 4\sin t}\, dt.$$

3) Lungo la circonferenza Γ di centro $3i$ e raggio $\sqrt{10}$, orientata positivamente, calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \left(\frac{e^{4z+12}}{z^2 + 6z + 18} + \sin(10z) \right) dz.$$

4) Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^3 + 2n} \left(\frac{z}{\sqrt{11}\,\mathrm{Re}z + 30i} \right)^n.$$

5) Utilizzando metodi di Analisi Complessa, determinare il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 + \cos(3x)}{x^2 + 2x + 5}\, dx.$$

6) Determinare le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ delle equazioni

$$z^4 + 256 = 0,$$

$$e^{3iz} + \sqrt{3}\, i = -1.$$