METODI MATEMATICI
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 19 NOVEMBRE 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{quando } t \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{quando } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che f è sviluppabile in serie di Fourier.
b) Scrivere lo sviluppo di Fourier in forma trigonometrica.
c) Scrivere l'espressione dell'uguaglianza di Parseval in questo caso.

2) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(z-1)\sin(2z)}{3z(z+1)(z-2)}.$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità, classificarle e calcolare i relativi residui. Indicata, quindi, con $C_3(0)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 3, orientata positivamente, calcolare il valore di

$$\int_{C_3(0)} f(z)\, dz.$$

3) Utilizzando opportunamente il Lemma di Jordan, calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-3i)}\, dx.$$

Si ricordi che $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

4) Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{4 - \sin t}\, dt.$$

5) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + \ln n} \left(\frac{z-4i}{z+8}\right)^n,$$

precisando **se è aperto o chiuso**.

6) Risolvere in campo complesso l'equazione

$$\cos^2 z - 5\cos z + 6 = 0.$$