METODI MATEMATICI
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 19 NOVEMBRE 2007

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sin(3z^2)}{2z^3(z+5)}.$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità, classificarle e calcolare i relativi residui. Scrivere, inoltre, lo sviluppo di Laurent della f relativo a $z = 0$.

2) Con metodi di Analisi Complessa, calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{7 + 4\cos t}\, dt.$$

3) Lungo la circonferenza Γ di centro $2i$ e raggio $\sqrt{5}$, orientata positivamente, calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \left(\frac{e^{z+1}}{z^2 + 2z + 5} + \cos(5z) \right) dz.$$

4) Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(\frac{z}{\sqrt{5}\mathrm{Re}\, z + 6i} \right)^n .$$

5) Utilizzando metodi di Analisi Complessa, determinare il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin(3x)}{x^2 + 4x + 8}\, dx.$$

6) Determinare le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ delle equazioni

$$z^3 + 27i = 0,$$

$$e^{4z} + \sqrt{3} = i.$$