METODI MATEMATICI per l'INGEGNERIA

PRIMA PROVA IN ITINERE del 19 novembre 2001

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\, 2^n} \left(\frac{z+i}{z-1}\right)^n$$

precisando se è aperto o chiuso.

2) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln(n+2)} \left(\frac{z-4i}{z-4}\right)^n .$$

3) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$(-8)^z = -64i.$$

4) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\cos z = 3.$$

5) Determinare la funzione olomorfa $f = u + iv$ sapendo che $f(0,0) = 0$ e

$$u(x,y) = x \sin x \cosh y - y \cos x \sinh y.$$

6) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{cotan}(\pi\, z)}{4z^2+1}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e valutare $\int_C f(z)\,dz$ dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio $5/4$ orientata positivamente.

7) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^3\, \sin i/z}{(z-2)^2}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$, precisandone il disco forato di convergenza.

8) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(3z^2 - 8)\sin(\pi\, z)}{z^2 + 9}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$.

9) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2 + x}{x^4 + 1}\, dx, \qquad \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^3 - 1}\, dx.$$

10) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\, dx.$$

11) Utilizzando il Lemma di Jordan ed il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 6x + 14}\, dx.$$

12) Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(t - \pi)^2 & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f, studiarne la convergenza puntuale e in particolare valutare la somma della serie in $t = -\frac{1}{4}\pi$.

13) Si consideri la funzione 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \le 0 \\ t & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f, studiarne la convergenza puntuale e utilizzando un opportuno punto valutare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.

14) Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (\pi - t)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scriverne lo sviluppo di Fourier ed utilizzando l'uguaglianza di Parseval calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.