METODI MATEMATICI per l'INGEGNERIA

PRIMA PROVA IN ITINERE del 19 novembre 2001

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\, 3^n} \left(\frac{z-i}{z+1} \right)^n$$

precisando se è aperto o chiuso.

2) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n+3)} \left(\frac{z-2}{z-2i} \right)^n .$$

3) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$(-7)^z = 49i.$$

4) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\sin z = 3.$$

5) Determinare la funzione olomorfa $f = u + iv$ sapendo che $f(0,0) = 0$ e

$$u(x,y) = x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y.$$

6) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\pi\, z)}{z^2+1}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e valutare $\int_C f(z)\, dz$ dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio 5/4 orientata positivamente.

7) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2\, e^{i/z}}{(z-1)^2}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in $z = 0$, precisandone il disco forato di convergenza.

8) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(z^3 - 2z)\cos(\pi\, z)}{z^2 + 4}.$$

Determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$.

9) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2x^2}{x^4 + 1}\, dx, \qquad \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 1}{x^3 - 8}\, dx.$$

10) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 - 2\cos x}\, dx.$$

11) Utilizzando il Lemma di Jordan ed il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 6x + 14}\, dx.$$

12) Si consideri la funzione <u>pari</u>, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}(t - \pi)^2 & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f, studiarne la convergenza puntuale e in particolare valutare la somma della serie in $t = -\frac{3}{4}\pi$.

13) Si consideri la funzione 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t & -\pi < t \le 0 \\ 0 & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f, studiarne la convergenza puntuale e utilizzando un opportuno punto valutare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.

14) Si consideri la funzione <u>pari</u>, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t - \pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scriverne lo sviluppo di Fourier ed utilizzando l'uguaglianza di Parseval calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.