METODI MATEMATICI
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 17 NOVEMBRE 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, **dispari**, definita da

$$f(t) = e^{2t} \quad \text{quando} \quad t \in]0, \pi[.$$

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che f è sviluppabile in serie di Fourier.
b) Scrivere lo sviluppo di Fourier in forma trigonometrica, osservando che

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} f(t) \, e^{int} \, dt.$$

c) Scrivere l'espressione dell'uguaglianza di Parseval in questo caso.

2) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(z+1) \cosh \frac{2}{z}}{(z-2)(z+4)}.$$

Determinare le singolarità, classificarle e calcolare i relativi residui. Scrivere quindi lo sviluppo di Laurent della f relativo a $z = 0$.

3) Utilizzando opportunamente il Lemma di Jordan, calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin(5x)}{x^2 + 8x + 32} \, dx.$$

4) Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{4 + \sin t} \, dt.$$

5) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2} \left(\frac{z - 3i}{z - 6} \right)^n,$$

precisando **se è aperto o chiuso**.

6) Determinare la funzione olomorfa $f = u + iv$, sapendo che

$$u(x, y) = x - 2 + \sin(2x) \cosh(2y) \quad \text{e} \quad f(0) = -2.$$